# Experiencia de la integración de las TICs para la enseñanza y aprendizaje del Cálculo II

Jose Arturo Molina Mora[1]

[1] Universidad de Costa Rica, Costa Rica

jose.molinamora@ucr.ac.cr

## Resumen

Las Tecnologías de la Información y Comunicación (TICs) como estrategia didáctica responden a las demandas de innovación y mejora continua que deben caracterizar el proceso enseñanza y aprendizaje, particularmente en la matemática universitaria. Se presenta la experiencia de la introducción de las TICs en un curso de Cálculo II y con una implementación de ocho años de evolución. Las diferentes actividades fueron clasificadas como laboratorios, actividades complementarias y proyecto corto, las cuales están relacionadas y permiten tener diferentes escenarios para introducir, comprender e integrar los diferentes temas del curso. Además, actividades relacionadas con modelos matemáticos de diferentes situaciones han permitido una integración de los contenidos con aplicaciones del área académica de los estudiantes. En conjunto, las diferentes actividades con la introducción de las TICs han funcionado como un elemento clave para promover la motivación de los estudiantes y otorgarles un papel dinámico con la guía del docente.

*Palabras clave*: TICs - Cálculo II - Docencia universitaria - Matemática

## Abstract

Information and Communication Technologies (ICTs) as teaching strategy respond to the demands of innovation and continuous improvement that should characterize the teaching and learning process, particularly in university mathematics. The experience of the introduction of ICTs in a course of Calculus II with an implementation of 8 years of evolution is presented. Different activities were classified as laboratories, complementary activities and short project, which are related and have different scenarios for entering, understanding and integrating the different course topics. In addition, activities of mathematical models of different situations have allowed integration of content with the academic field applications of students. Together, the various activities with the introduction of ICTs have functioned as a key element to promote student motivation and give them a dynamic role with the teacher's guidance.

Keywords: ICT - Calculus II - University teaching - Mathematics

## 1. Introducción

El proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas universitarias, en un contexto de una gestión de la educación de calidad, la mejora continua es un proceso intrínseco e indispensable. En este sentido, debe existir una congruencia con las propuestas que fortalezcan la motivación de los estudiantes y la incorporación de los avances tecnológicos en el quehacer en el aula, siendo la incorporación de las TICs (Tecnologías de la Información y Comunicación) una de las estrategias para cubrir dicho objetivo. Integralmente, las TICs en educación se refieren al conjunto de todos los medios desarrollados en torno al surgimiento de la ciencias de la informática y que permiten la comunicación e interacción con fines educativos, ya sea tanto de manera sincrónica o asincrónica, individual o colectiva [1].

El uso de paquetes computacionales ha implicado cambios significativos en la forma de enseñar y aprender, con el desarrollo de competencias, conocimientos y valores fundamentales para el proceso [2], así como la incorporación de nuevos objetivos de aprendizaje, resaltando aquellos que permiten la solución e interpretación de diferentes situaciones del entorno, este último siendo uno de los aspectos más criticados en cursos de matemática básica.

De esta forma, la estrategia plantea la incorporación de las TICs en un curso de Cálculo II, tanto para la introducción, desarrollo y extensión de temas, así como el modelado matemático para estudiar aplicaciones de temas puntuales. Esta experiencia es resultado de un proceso de mejora continua gestado a lo largo de ocho años de implementación y que se ha dado de forma gradual.

## 2. Marco teórico: TICs como estrategia didáctica

Como estrategia didáctica, la incorporación de las TICs ha sido bien caracterizada y difundida por sus altos niveles de significancia en educación, incluyendo la educación universitaria [3]. La eficiencia del proceso enseñanza y aprendizaje puede verse mejorada con el uso de las TICs, haciendo que el estudiante tenga un papel más activo, comprenda e interprete situaciones del entorno, estimule habilidades analíticas y establezca asociaciones conceptuales [4]. En matemáticas, la implementación de las TICs se ha favorecido con el desarrollo de paquetes computacionales de alta capacidad en la últimas dos décadas, incluyendo versiones línea y aplicaciones, y que a nivel de contenido ha implicado un cambio del abordaje clásico de matemática meramente algebraica, formal y abstracta por una estrategia que ha favorecido la visualización, comprensión y análisis de conceptos relacionados con los temas de estudio, la integración de diversos fundamentos teóricos con problemas reales del entorno para modelarlos matemáticamente y verificar el potencial del cálculo numérico [2], [5]. Todo en conjunto, permite establecer un eje motivacional para el estudiante en el aprendizaje de las matemáticas y apreciar la aplicabilidad a las diversas áreas académicas [6].

Dado que en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática universitaria se propicia una construcción profunda del conocimiento, la conjunción del conocimiento previo, las TICs y situaciones de interés para el estudiante representan puntos de valor agregado para lograr dicho objetivo [5]. En este sentido, las estrategias didácticas logran mejores resultados cuando se plantean en el contexto estudiantil, y en este caso el uso de las TICs responden a las tendencias generales de acceso a las tecnologías por parte de los estudiantes [7]. La existencia y exposición de las TICs en diferentes aspectos de la vida cotidiana y de los cuales los estudiantes también son parte activa, permite que esta estrategia por si sola puede influenciar positivamente al lograr que se desarrolle un sentido de pertenencia o incluso familiaridad, una actitud afectiva y emocional hacia la matemática y generar una experiencia de aprendizaje, todas en miras de lograr una motivación en los estudiantes [8].

Así, la integración de las TICs al aula universitaria confiere bondades al proceso enseñanza y aprendizaje que incluye el desarrollo de competencias, uso del conocimiento previo para generar nuevo conocimiento, extrapolación de contenido en situaciones particulares en su área de estudio, desarrollo de destrezas y habilidades de investigación y acceso a tecnologías, formación de criterio analítico, crítico y toma de decisiones, evaluación de sus implementaciones y de pares, compromiso para el trabajo en equipo, habilidad para desarrollar e interpretar modelos matemáticos y comprensión de conceptos abstractos a partir de casos particulares [8], [7], [9]. Desde el punto de vista de currículum y contenidos, la incorporación de las TICs ofrece soluciones a las debilidades inherentes al aprendizaje de la matemática universitaria, como lo son la introducción a demostraciones y matemática formal, el lenguaje matemático, enlace con conocimientos previos y la capacidad para trasladar el conocimiento adquirido a aplicaciones de la vida profesional [10].

Por otra parte, es indispensable tener claro el papel de los diversos actores en este proceso. Tanto docente como estudiante deben asumir funciones diferentes a los métodos más tradicionales, donde hay un proceso directo y unidireccional de emisión-recepción de contenidos [11]. La interacción bidireccional es un elemento cable implementar una estrategia de este tipo. El estudiante, ya sea en actividades individuales o grupales, es el actor más activo y que construye su conocimiento con la guía del docente. El grado de interacción con el docente o demás compañeros depende del tipo de actividad, pero se da un énfasis al uso de sus conocimientos previos para la introducción y desarrollo de temas.

Algunos reportes previos de la introducción de las TICs en la enseñanza de la matemática universitaria incluyen el caso de cursos de Ecuaciones Diferenciales, lo cual se ve facilitado por las diversas aplicaciones en diferentes áreas académicas y situaciones de la vida real que son parte usual de contenido del curso. La experiencia de De Faria (2003) dispone de herramientas para la construcción de conceptos matemáticos en el proceso enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales usando recursos como calculadora graficadora y lenguaje de programación para el cálculo y análisis de diversos problemas [12]. Un trabajo similar, fue presentado por Perdomo en 2011, en el que se dio énfasis a la comprensión e interpretación, obteniendo resultados favorables respecto a la resolución de problemas tradicional y basada principalmente en la búsqueda de soluciones [13]. Más recientemente, se presentó el caso del curso de ecuaciones diferenciales aplicadas, para el cual se reportaron una serie de actividades semanales por cada uno de los temas y la


TE&ET N°18 | Diciembre 2016 | ISSN 1850-9959 | RedUNCI-UNLP

asignación de un problema ó situación de alguna aplicación de sistemas de ecuaciones diferenciales y cuya solución se establecía en forma de proyecto de investigación [9]. Otras de las implementaciones realizadas, pero en este caso en el curso de Álgebra lineal, es una propuesta de 2009 en un curso para estudiantes de enseñanza de la matemática y en el que se dio la integración del modelado y las TICs con uso de software de cálculo simbólico [10].

En el caso particular del curso de Cálculo II, los temas estudiados con aplicación de las TICs permiten facilitar la comprensión de conceptos al poder representarlos con gráficas, manipularlos y determinar el efecto sobre los parámetros, entre otros. En general, para cada uno de los temas de Cálculo II es posible encontrar o elaborar recursos audiovisuales y que pueden disponerse en conjunto en un mismo curso y así establecer un paradigma de educación complementada con las TICs. Por ejemplo, en el tema de los polinomios de Taylor, es posible analizar y establecer hipótesis respecto al efecto del grado o del centro del polinomio sobre la aproximación con diferentes simuladores, o bien, los temas relacionados con geometría analítica pueden estudiarse a partir de casos para determinar las diferentes propiedades, obtención de las curvas y deducción de las ecuaciones con algún programa de cálculo simbólico y gráficas. En este sentido, tanto la visualización, ejecución de comandos básicos de programación y la simplificación algebraica son bondades explotadas con las TICs en los diferentes contenidos de los cursos de matemáticas [14].

Sin embargo, como toda estrategia didáctica, el uso de las TICs trae consigo algunas limitaciones que deben considerarse durante su implementación. Inicialmente, muchos de los estudiantes consideran que un curso complementado con las TICs significa que tecnología sustituye todo quehacer en el curso, lo cual plantea como reto para el docente el crear conciencia de que las herramientas tecnológicas no resuelven por si solas los problemas en matemática, sino que facilitan la comprensión, desarrollo de aplicaciones y la resolución de ejercicios de alta complejidad que sin el uso de herramientas computacionales serían sumamente difíciles de analizar [6]. En otro extremo, se pude crear una tendencia a centrarse en la búsqueda de algoritmos de resolución para dar respuesta a las actividades propuestas pero con una débil capacidad para dar interpretación a las diversas situaciones expuestas [13].

Otras dificultades se dan en el ámbito del concepto de aproximación y la aplicación de métodos numéricos simples, pues en muchas ocasiones se considera como una respuesta inválida, aunque la interpretación que se pueda dar si es factible. Adicionalmente, los docentes podrían presentar alguna idea a sub-estimar las competencias que los estudiantes para desarrollar habilidades en un entorno educativo mediado con TICs [15]. Además, algunas dificultades generadas se pueden presentarse con el uso de las herramientas implementadas y no de los conceptos matemáticos en sí, lo cual hace el papel del docente y la guía didáctica sean clave al introducir las TICs [16]. Todo estos aspectos pueden minimizarse en efecto si hay un control del diseño curricular con un sustento científico adecuado y una propuesta didáctica claramente definida antes de implementar [1].

# 3. Implementación

## 3.1 Contexto

El curso de Cálculo II es una materia de servicio de la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica, dirigido a futuros profesionales de las carreras de Ingeniería, Enseñanza de las Ciencias, Química, Física y Geología. Un mismo profesor es el encargado de impartir todas las lecciones de un semestre regular de lecciones, con un total de 5 horas semanales (dividido en tractos de 2 y 3 horas). Cada uno de los ocho temas del curso (Ver Tabla 1 para el detalle) se trabaja por aproximadamente dos semanas de clases, incluyendo 3 horas específicas para el desarrollo de laboratorios.

En el contexto de un proceso de mejora continua del proceso enseñanza y aprendizaje del Cálculo II, al igual que todo curso universitario, semestralmente los estudiantes realizan evaluaciones sobre el curso, los docentes, aspectos administrativos, materiales y recursos. A lo largo de los años, estos aspectos han sido incluidos en modificaciones en contenido, evaluación e introducción de las TICs, entre otros, en miras de aumentar la satisfacción de los estudiantes respecto al aprendizaje del Cálculo II. Es así que desde el año 2008 diversos proyectos han permitido una introducción paulatina de las TICs hasta llegar a sesiones de laboratorio semanales y en todos los temas. Se cuenta con un laboratorio con 30 computadoras, lo cual permite que cada uno de los 30 estudiantes pueda trabajar de forma individual.

## 3.2 Actividades desarrolladas

Las actividades realizadas en el curso de Cálculo II en el contexto de las TICs, se pueden agrupar en Actividades complementarias, Laboratorios y Proyecto corto. Las dos primeras varían de acuerdo al tema en estudio y pueden ser usadas tanto para introducir temas, reforzar conocimientos previos, desarrollar contenido, analizar casos de aplicaciones y modelos matemáticos, o bien, extender el contenido con temas relacionados. Además, pueden ser de realización individual o grupal, en clase o como tarea, o bien, antes o después de la clase donde se estudia el contenido respectivo. Respecto al proyecto corto, es un laboratorio de trabajo grupal y que requiere de varias sesiones de trabajo para lograr el modelado de un problema o situación asignada.

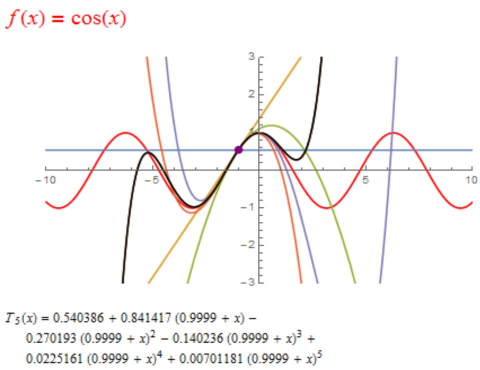
Las diferentes actividades, de acuerdo a su pertinencia temporal respecto al tema de estudio, fueron agrupadas como actividades de Introducción o Exploración (I), de desarrollo de contenido (C) y de extensión o aplicación (E).

Las actividades de introducción corresponden a aquellas que permiten la utilización del conocimiento previo para ser dado de forma introductoria a un tema nuevo y así establecer una continuidad con el nuevo contenido.

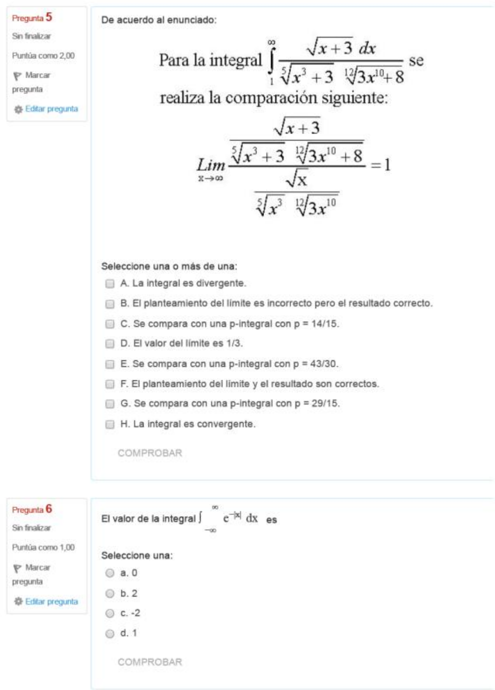
**FIGURA 1**

Ejemplos de actividades complementarias del curso de Cálculo II.

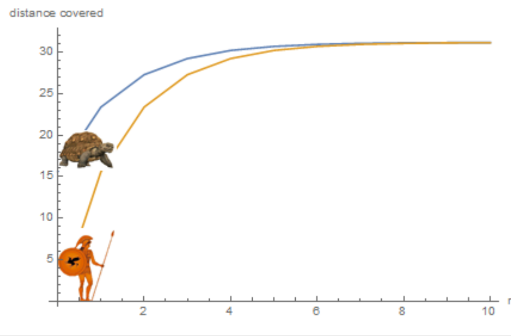
**A Actividad en línea para conceptos de Polinomios de Taylor**



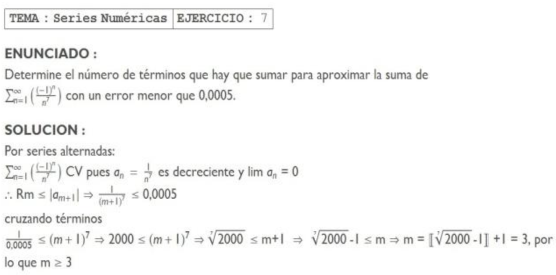

**B Cuestionario en línea para el tema de Integrales Impropias**




**C Actividad con simulador para conceptos de Series Numéricas**




**D Actividad de Evaluación por pares para el tema de Series Numéricas**

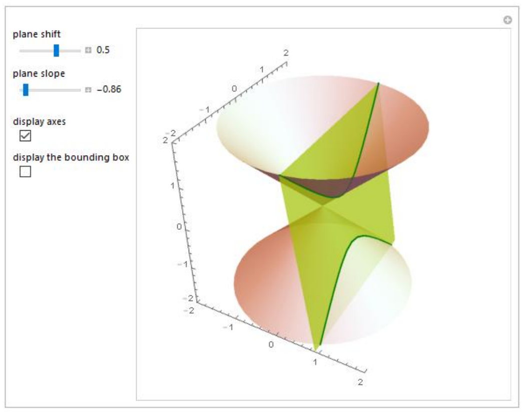


TEMA : Series Numéricas | EJERCICIO : 7

**ENUNCIADO :**
Determine el número de términos que hay que sumar para aproximar la suma de $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^7}\right)$ con un error menor que 0,0005.

**SOLUCION :**
Por series alternadas:
$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^7}\right)$ CV pues $a_n = \frac{1}{n^7}$ es decreciente y $\lim a_n = 0$
$\therefore$ Rm $\leq |a_{m+1}| \Rightarrow \frac{1}{(m+1)^7} \leq 0{,}0005$
cruzando términos
$\frac{1}{0{,}0005} \leq (m+1)^7 \Rightarrow 2000 \leq (m+1)^7 \Rightarrow \sqrt[7]{2000} \leq m+1 \Rightarrow \sqrt[7]{2000}-1 \leq m \Rightarrow m = [\![\sqrt[7]{2000}-1]\!]+1 = 3$, por lo que m $\geq 3$

**E Actividad con simulador para estudio de Secciones Cónicas**



Por ejemplo, retomar el concepto de área bajo la curva de Cálculo I permite establecer un primer vínculo para el estudio de integrales impropias. Respecto a las actividades de desarrollo de contenido, son aquellas que realizan un vínculo directo con los contenidos y temas clave de curso e incluye aspectos de visualización, programación e interpretación, y no tanto en procedimientos algebraicos. Ejemplos incluyen el estudio de teoremas representados gráficamente o el uso de código de programación para resolver problemas algebraicos. Finalmente, las actividades de extensión o aplicación son las actividades que incluyen contenidos adicionales a los temas oficiales de estudio y usualmente incluye aplicaciones y modelos matemáticos. En este sentido, la naturaleza del curso no permite que éste se base modelos matemáticos, a diferencia de lo que podría ser un curso de Ecuaciones Diferenciales, pero se han implementado ejemplos para motivar y apreciar el potencial uso de los distintos conceptos estudiados. Ejemplos de este tipo lo constituyen los cálculos de áreas de objetos de la vida real y modelados con coordenadas polares, o bien, el modelo matemático asignado para el proyecto corto.

*Actividades complementarias*

Las actividades complementarias al contenido en estudio se refieren a diversos recursos, usualmente en línea, que permiten que el estudiante analice, responda ó interactúe con los demás compañeros en actividades que usualmente no requieren uso de software matemático especializado; acá se incluyen la visualización de videos ó material en línea, cuestionarios o prácticas en línea, actividades por pares, foros, entre otros. Muchas de las asignaciones se forman parte de laboratorios o se presentan con otras actividades complementarias, como por ejemplo la actividad de conceptos de Polinomios de Taylor.

Para gestionar toda la información en este tipo de actividad se usa la plataforma virtual *moodle,* la cual no solamente permite almacenar los diferentes recursos del curso, sino que contiene muchos de los elementos de evaluación, sumativa o formativa, y facilita la interacción y comunicación docente-estudiante y entre estudiantes. En la misma plataforma, se pueden acceder a archivos, tareas y cuestionarios, foros de discusión, talleres de pares, editores en línea para Latex, videos, plataformas de simulación (se usan de forma integrada a algunos laboratorios) y calculadores simbólicos en línea. Más en detalle se tiene:

- Tareas y cuestionarios: Se refieren a actividades con ejercicios de la práctica de cada examen parcial (3 en total) en el que se incluye un cuestionario de preguntas para marcar (conceptos o problemas de resolución breve, 3 cuestionarios en total) y tareas de desarrollo (5 en total). Un ejemplo del cuestionario de Integrales Impropias es presentado en la Figura 1-B y una parte de la tarea de desarrollo con evaluación por pares es mostrado en la Figura 1-D.
- Aplicaciones de demostración de Wolfram (Wolfram-Demostrations): Se usaron 6 aplicaciones, que corresponden a ejemplos implementados en código de *Mathematica* y disponibles en línea. Los temas en los que se usaron este tipo de recurso fueron Polinomios de Taylor (mostrado en la Figura 1-A) para el estudio de conceptos y el efecto del centro y el grado sobre la aproximación, integrales impropias para interpretar el área bajo la curva cuando alguna variable tiende a infinito, Series Numéricas para los conceptos de serie geométrica (Figura 1-C), Coordenadas polares para gráficas y áreas, (Mostrado en la Figura 2-C), Secciones Cónicas para comprender el origen geométrico (Figura 1-E) y números complejos para estudio de operaciones básicas.
- Videos: Se cuenta con la solución de ejercicios de mediana o alta dificultad en formato de video, elaborados por el docente y que se recomiendan verlos una vez que cuente con una comprensión plena del contenido. Por cada capítulo del curso se presentaron entre 3 y 5 videos con ejercicios específicos de la práctica, con un abordaje que incluye su resolución y repaso de conceptos y teoremas.
- Redes sociales: Usado principalmente para atención de dudas, compartir enlaces con contenido de interés o aspectos administrativos. Se ha utilizado Facebook y Google+ y normalmente se realizaron entre 2 y 4 intervenciones semanales, exceptuando los días previos a los exámenes parciales, los cuales la frecuencia fue diaria.
- Foros: Se realizaron para discutir sobre conceptos generales de algún tema (previo o posterior a la clase), posibles soluciones a ejercicios, interpretación de resultados ó temas para motivación. El docente se mantuvo como guía para orientar el tipo de respuestas, además siempre se realizó una retroalimentación final para aclarar dudas específicas o validar conjeturas del foro. Los temas que se han implementado son: Repaso de métodos de integración, principio de parsimonia, Foro sobre la película “A beatiful mind”, interpretación de la paradoja de Zenón (complementario con Figura 1-C), repaso de ecuaciones trigonométricas, operaciones con números complejos y obtención geométrica de

secciones cónicas (Figura 1-E), todos con un frecuencia en el curso entre 2 y 4 semanas.

- Taller de pares (peer asignment): Son actividades de desarrollo corto y con escritura en código Latex dentro la plataforma de *moodle*. Después de presentar su solución, los estudiantes revisaron la solución de 3 de sus compañeros con una guía para asignación de puntaje.

**TABLA I**

Descripción de contenidos y laboratorios en el curso de Cálculo II

| Contenido | Implementación | |
|---|---|---|
| | Laboratorio (Tipo)* | Descripción de actividad |
| 1. Polinomios de Taylor | #1: Conceptos de Polinomios de Taylor (I) | Actividad extraclase y previo al estudio del tema. El estudiante explora gráficamente el efecto del grado del polinomio y el centro sobre la función que se aproxima.<br>Se usa documento con conceptos y recurso en línea de Wolfram, disponible en: http://demonstrations.wolfram.com/TaylorSeries/ . Ver Figura 1-A. |
| | #2: Polinomios de Taylor frecuentes (C) | Actividad en clase para comprender la forma general de un polinomio de Taylor y la programación de la fórmula para la generación de lista de polinomios de uso frecuente (software *Mathematica*). |
| 2. Integrales impropias | #3 Cálculo de Integrales Impropias (C) | Actividad en clase para programar funciones, graficarlas y calcular el área bajo la curva (software MUPAD). Se usa ejemplo para explicar gráfica y algebraicamente el Teorema de Condición Necesaria: Efecto de que la función f(x) no tienda a 0 (si x tiende a infinito) sobre el cálculo del área. |
| | #4 Aplicación de integrales Impropias: Curva de Gauss (E) | En clase se demuestra que la integral que modela la curva de Gauss es convergente. Se calcula la integral en todo IR en *Mathematica* y se da interpretación en términos estadísticos (precisión y exactitud) al calcular valores para 1 y 2 de la desviación estándar en la curva normal (promedio 0). Ver Figura 2-A. |
| 3. Sucesiones e Inducción | #5 Sucesiones recurrentes : Modelo de la sucesión de Fibonacci (E) | Se plantea el problema de Fibonacci y el modelo ideal para el crecimiento de la población de conejos. Se determina la función que modela el problema, se programa en *Mathematica* y se realizan los cálculos que responden al enunciado. Además se estudia el número de oro con ejemplos presentes en la naturaleza y los cálculos a partir de la sucesión de Fibonacci.<br>Ver Figura 2-B. |
| 4. Series Numéricas | #6 Introducción a Series Numéricas: Modelo de la Paradoja de Zenón (I) | Actividad extraclase y previo al estudio del tema. Se plantea la paradoja de Zenón y su interpretación gráfica para el estudio de la serie geométrica a partir de la manipulación del simulador. Se usa documento con conceptos y recurso en línea de Wolfram, disponible en: http://demonstrations.wolfram.com/ZenosParadoxAchillesAndTheTortoise/<br>Ver Figura 1-C. |
| | #7 Aproximaciones de Series Numéricas (C) | Actividad en clase para evaluar el error cometido al aproximar series numéricas con sumas finitas y determinar el valor predictivo de las cotas del error con los teoremas estudiados. Se introduce MATLAB. |
| 5. Series de Potencias y de Taylor | #8 Conceptos de radio e intervalo de convergencia (C) | En clase, actividad para comprender los conceptos de radio e intervalo de convergencia en una variable. Se realizan aproximaciones con el software MATLAB y se estima el error cometido tanto para valores dentro como fuera de los intervalos. Vinculado a Polinomios de Taylor. |
| | # 9 Modelado de problemas dinámicos con desarrollos de Taylor (E).<br>PROYECTO FINAL de múltiples sesiones. | Trabajo grupal. Se consideran diferentes aspectos de programación en *Mathematica* ya estudiados en laboratorios previos (programar una función, graficar, resolver ecuaciones, evaluar, calcular desarrollo de Taylor y el intervalo de convergencia, entre otros) para trabajar con un problema clásico de sistemas dinámicos. Se realiza por varias sesiones de trabajo y requiere de la elaboración de un reporte tipo artículo científico (grupal). Vinculado a Polinomios de Taylor y se usa una guía dada por el docente para una de tres posibles aplicaciones.<br>Ver Tabla 2 y Figura 3. |
| 6. Coordenadas polares | # 10 Gráficas y áreas de Coordenadas Polares (C) | En clase, se interpreta como la forma algebraica de la función puede usarse para predecir la gráfica de funciones clásicas y se grafican en el programa *Winplot*, además de calcular áreas que involucran curvas de este tipo con el software *Mathematica*.<br>Ver Figura 2-C. |
| | #11 Aplicación de Coordenadas Polares: Modelado del área de galletas de mar (E) | En clase, se presenta una foto tamaño real de una galleta de mar, para el cual se usan coordenadas polares para dibujarla y calcular la superficie blanca, la superficie gris y los podios. Se incluye una introducción biológica y los estudiantes deben generar las funciones que permitan la representación de la galleta de mar. Los cálculos se basan en los comandos del laboratorio anterior.<br>Ver Figura 2-D. |
| 7. Números complejos | #12 Números complejos: Operaciones en forma polar (C) | Actividad en clase para interpretar geométricamente las operaciones de suma, resta y producto de números complejos en forma polar. Vinculado a Coordenadas Polares.<br>Se usa documento con conceptos y recurso en línea de Wolfram, disponible en: http://demonstrations.wolfram.com/ComplexMultiplication/ |
| | #13 Números complejos Raíces enésimas (C) | Actividad en parejas para comprender e interpretar gráficamente las soluciones de una ecuación con números complejos del tipo $z^n+a=0$. Se usa un archivo en *Mathematica* diseñado por el docente, con el fin de que se explore los efectos del grado de la ecuación, el número de soluciones, la figura geométrica obtenida y las propiedades de las soluciones. Ver Figura 2-E. |
| 8. Secciones cónicas | #14 Conceptos de secciones cónicas (I) | Extraclase, la actividad busca la comprensión del origen geométrico de las secciones cónicas al cortar un cono con un plano y el efecto de los parámetros usados. Ver Figura 1-E.<br>Se usa documento con conceptos, el programa Winlab y recursos en línea Wolfram, disponibles en: |

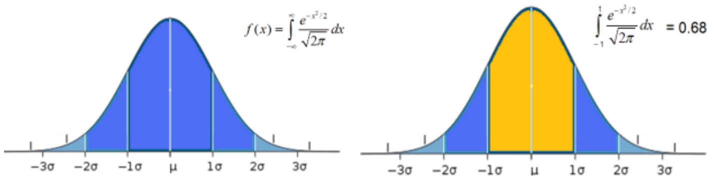
| | | |
|---|---|---|
| | | http://demonstrations.wolfram.com/PlaneCrossSectionsOfTheSurfaceOfACone/ http://demonstrations.wolfram.com/ConicSectionsEquationsAndGraphs/ |
| | #15 Modelado del volumen de un balón de rugby (E) | En clase y con la introducción breve del volumen de un objeto como una integral doble, el docente expone como se usan las secciones cónicas para establecer los límites de la figura y se plantea la expresión que calculará el volumen (en *Mathematica)*. Con un material con código de programación elaborado por el docente, este laboratorio es inicialmente demostrativo pero los estudiantes pueden manipular los parámetros para ver su efecto en la forma de la figura. |

* Clasificación de las actividades: De introducción (I), de contenido (C) ó de Extensión-Integración (E).

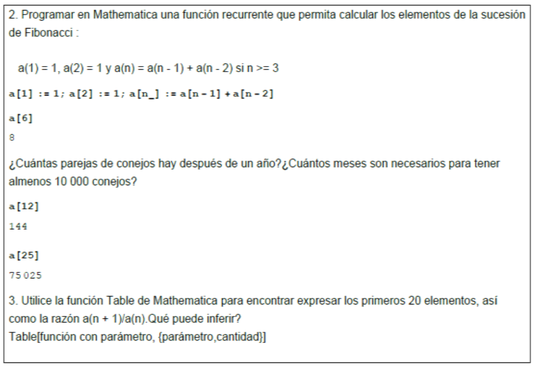
**FIGURA 2**

Ejemplos de actividades tipo laboratorio del curso de Cálculo II.

**A Laboratorio de Aplicación de Integrales Impropias: Curva de Gauss**




**B Laboratorio de Sucesiones Recurrentes:**
**Sucesión de Fibonacci**


2. Programar en Mathematica una función recurrente que permita calcular los elementos de la sucesión de Fibonacci :

a(1) = 1, a(2) = 1 y a(n) = a(n - 1) + a(n - 2) si n >= 3

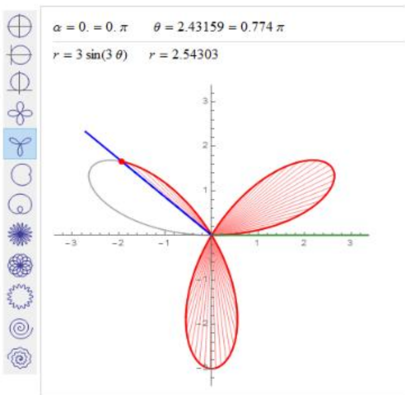
```
a[1] := 1; a[2] := 1; a[n_] := a[n - 1] + a[n - 2]
a[6]
8
```

¿Cuántas parejas de conejos hay después de un año?¿Cuántos meses son necesarios para tener almenos 10 000 conejos?

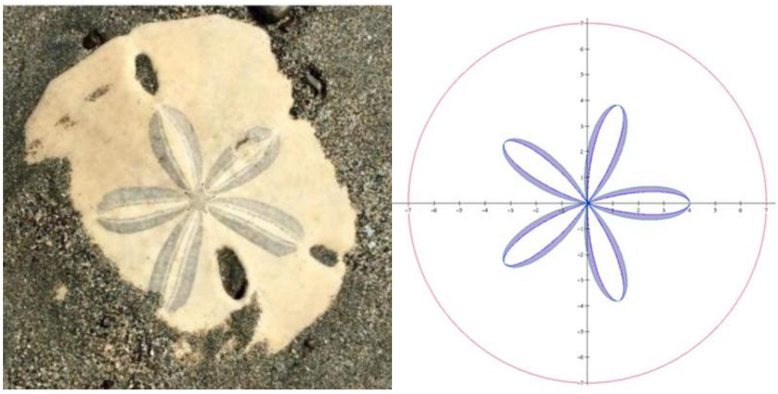
```
a[12]
144
a[25]
75 025
```

3. Utilice la función Table de Mathematica para encontrar expresar los primeros 20 elementos, así como la razón a(n + 1)/a(n).Qué puede inferir?
Table[función con parámetro, {parámetro,cantidad}]

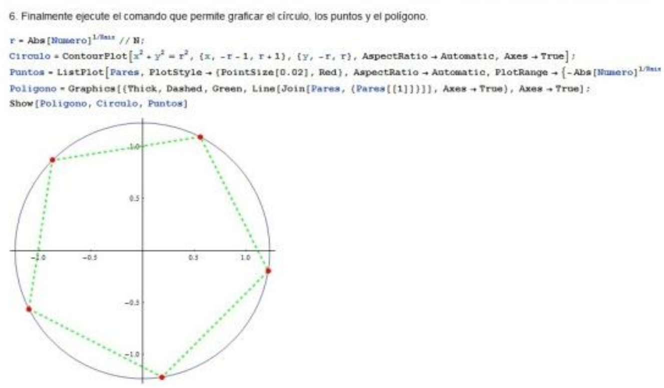
**C Laboratorio de Graficación de curvas en Coordenadas Polares**



**D Laboratorio de Aplicación de Coordenadas Polares: Galleta de mar**



**E Laboratorio de Números Complejos: Raíces enésimas**




La nota final, que además incluyó una revisión del docente, se obtuvo como el promedio de las 4 calificaciones. Se aplicaron dos actividades de este tipo, en los contenidos de integrales impropias y series numéricas. En la Figura 1-D se presenta un ejemplo en el tema de Series Numéricas. Este tipo de actividad tiene la ventaja de que hay un proceso de retroalimentación al realizar evaluación de las soluciones de los compañeros e incluso se puede permitir la autoevaluación, siempre con guías de asignación de puntajes y de forma controlada, lo cual destaca una característica de reflexión.

*Laboratorios*

Los laboratorios corresponden a prácticas que usualmente se trabajan en un archivo prediseñado para responder y en los que los estudiantes aplican diferentes conceptos del contenido del curso junto a herramientas de cálculo simbólico y visualización para dar solución e interpretación a diferentes situaciones o problemas. Para ello se requiere de software especializado, ya sea en la computadora o con plataformas en línea. Los programas usados fueron *Mathematica*, MuPAD, Winplot, Winlab y MATLAB, y exceptuando el último, todos están disponibles para que los estudiantes puedan instalarlo en sus computadores.

En la Tabla 1 se describen las diferentes actividades de laboratorio del curso de Cálculo II. Para cada uno se detalla si la actividad corresponde a Introducción, de Contenido o Extensión. Además, se presenta los aspectos generales de la implementación y los recursos de software usados. Para todos los temas se cuentan con dos actividades de laboratorio, a excepción del tema se Sucesiones e Inducción. En algunos casos, los laboratorios incluyeron actividades complementarias, como es el caso del primer laboratorio de Conceptos de Polinomios de Taylor, el cual inicialmente usó una Aplicación de demostración de Wolfram (Ver Figura 1-A) para analizar el efecto del centro y el grado sobre la aproximación, y luego se proceden a realizar cálculos con código de programación de *Mathematica*. De forma similar ocurrió para los temas de Series Numéricas, Números Complejos y Secciones Cónicas. Para los laboratorios de Integrales Impropias, diferentes comandos se usan para graficar y calcular las integrales y luego realizar interpretaciones con función que modela la curva de Gauss. Una introducción con las gráficas, como se muestra en Figura 2-A, permite dar interpretación en términos estadísticos.

Debido a la complejidad de los comandos de programación, el laboratorio de Números Complejos usa funciones ya programadas y que se manipulan fácilmente cambiando parámetros específicos y los valores a estudiar, lo cual centra la atención en la interpretación de lo que hace la función pero sin el detalle algebraico (Ver Figura 2-E).

En el caso del último laboratorio, para modelar un elipsoide visto como un balón de Rugby, se muestra como la figura tridimensional es cortada por un plano para generar las elipses, y se explica sin detalle, como se puede hallar el volumen mediante integración múltiple, la cual se resuelve en el software. En este caso, los aspectos matemáticos requeridos, tanto conceptuales como algebraicos, no son contenidos propios del Cálculo II pero puede justificarse como las secciones cónicas tienen un uso potencial en aplicaciones de cursos posteriores.

Pese a que en las dos actividades se brindan los comandos de programación para realizar ciertos cálculos (ya sea por la complejidad de programación o matemática), eso no pasa con el laboratorio de Sucesiones e Inducción, el cual pretende que el mismo estudiante infiera el código para diferentes sucesiones recursivas, incluyendo la Sucesión de Fibonacci como ejemplo modelo. Así, se da una introducción guiada a elementos básicos de programación. Una solución presentada por un estudiante es mostrada en la Figura 2-B. Para los últimos tres contenidos del curso, Números Complejos, Coordenadas Polares y Secciones Cónicas, la visualización es una herramienta indispensable tanto para la comprensión de conceptos como para los cálculos, lo cual hace que programas como Winplot y Winlab sean usados arduamente a lo largo del desarrollo de los contenidos, aún fuera de los laboratorios. En las Figuras 2-C y 2-D muestran ejemplos de soluciones dadas por estudiantes para los laboratorios de Coordenadas Polares.

*Proyecto corto*

Con el fin de vincular diferentes conceptos del curso de Cálculo II con problemas o situaciones del entorno académico del estudiante, se plantearon tres temas para trabajar en forma de un laboratorio grupal y prolongado, de al menos cuatro sesiones. El proyecto corto da más énfasis a un problema asignado y el uso de diferentes herramientas de varios laboratorios anteriores, lo cual lo vuelve una actividad que integra diferentes temas y cálculos en un solo módulo. Además, se brinda un componente de investigación previo al planteamiento y una parte final de interpretación, lo cual le da un valor agregado al solicitarse que la presentación final debía ser en formato de artículo científico. Se contó con tres temas posibles (detalles se muestran en la Tabla II) para el desarrollo del proyecto corto, de los cuales se asignó uno por cada grupo de tres personas. Tanto el problema, la ecuación diferencial asociada como los aspectos del contexto fueron dados, además que se contó con una plantilla en formato *Mathematica* para el desarrollo de las diferentes actividades y la elaboración del reporte final.

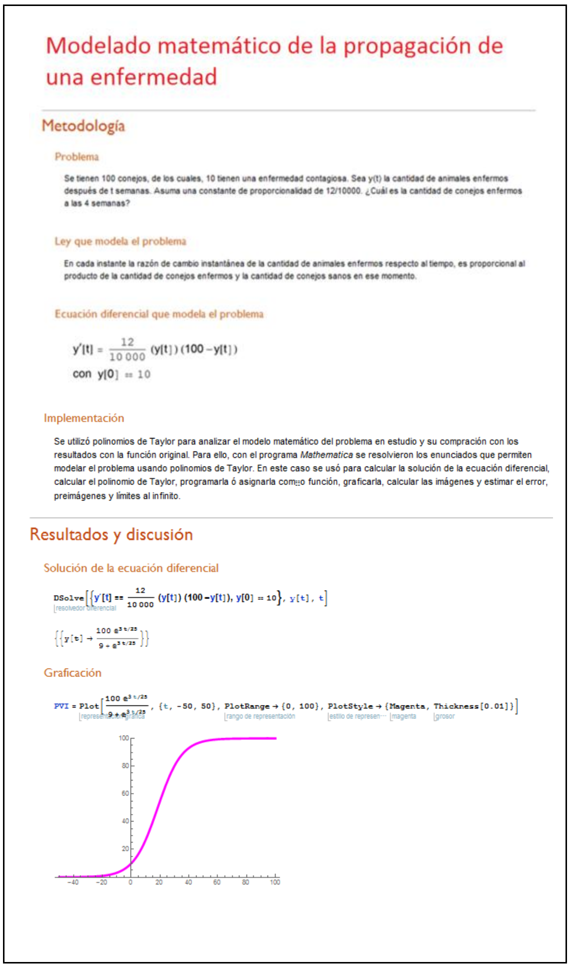
En una primera sesión se entregó la guía de trabajo, la cual inició con investigar algunos conceptos relacionados al tema de estudio y los estudiantes debieron redactar algunos párrafos explicando el problema y contenidos relacionados. Las dos sesiones siguientes se usaron para la aplicación de diferentes comandos, estudiados en laboratorios anteriores y presentados en la guía, para resolver los diferentes aspectos de la ecuación diferencial, graficación, aplicación de polinomios de Taylor y cálculos con la función obtenida. Pese a que los conceptos de ecuaciones diferenciales no son parte de Cálculo II, al inicio de la actividad se hace una extensión de los problemas de razones de cambio de Cálculo I y se explica brevemente el concepto de ecuación diferencial y la interpretación de la solución particular. La cuarta sesión se usó para dar interpretación a los resultados en el contexto del problema y dar detalles finales al documento final en formato de artículo científico.

En la Figura 3 se muestra una parte de uno de los reportes presentados por un grupo de estudiantes. El tema corresponde al modelado del crecimiento logístico, referido a la propagación de una enfermedad en conejos, para el cual se puede apreciar el detalle de la metodología y los primeros resultados obtenidos. Parte de la interpretaciones incluye el análisis de la gráfica en el contexto del problema, por ejemplo predecir el número de conejos enfermos a largo plazo, tanto para lo esperable en situación real, a través de la gráfica y por cálculo del límite a infinito de la respectiva función.

**TABLA II**
Descripción de temas de proyectos cortos de investigación del curso de Cálculo II

| **Aspecto** | **Tema 1** | **Tema 2** | **Tema 3** |
|---|---|---|---|
| Tema de estudio | Crecimiento logístico | Decaimiento radioactivo | Ley de Enfriamiento |
| Problema o situación a resolver | Se tienen 100 conejos, de los cuales, 10 tienen una enfermedad contagiosa. Sea y(t) la cantidad de animales enfermos después de t semanas. Asuma una constante de proporcionalidad de 12/10000. ¿Cuál es la cantidad de conejos enfermos a las 4 semanas? | El carbono-14 es un isótopo radiactivo con vida media de 5730 años y está presente en los seres vivos. ¿Cuál es el nivel de carbono-14, llamado *y(t)*, en un gramo de madera del anillo interior de un árbol muerto que murió hace 10 000 años? Asuma un 100% inicial y el valor de la constante se obtiene con Ln2/5730=0.00012. | Un individuo es asesinado (t=0) en una habitación con temperatura constante 22 ºC. A partir de su muerte, la temperatura empieza a descender según la Ley de enfriamiento de Newton, con una constante de proporcionalidad de 0.28768. Si el individuo es encontrado 2 horas después ¿Cuál es su temperatura? |
| Ley que explica el problema | En cada instante la razón de cambio instantánea de la cantidad de animales enfermos respecto al tiempo, es proporcional al producto de la cantidad de conejos enfermos y la cantidad de conejos sanos en ese momento. | La velocidad con que se desintegran los núcleos de los isótopos radiactivos es proporcional al número de núcleos presentes. | La razón de cambio de la temperatura del objeto respecto al tiempo es proporcional a la energía térmica perdida (temperatura del objeto menos temperatura del medio circundante). |
| Introducción: Conceptos básicos | • Modelado matemático (definición y para qué sirve).<br>• Crecimiento logístico (definición, forma de la curva, etc).<br>• Limitaciones del crecimiento logístico. | • Modelado matemático (definición y para qué sirve).<br>• Fechado con radiocarbono (utilidad, definición).<br>• Limitaciones del fechado con carbono. | • Modelado matemático (definición y para qué sirve).<br>• Enunciado de la Ley de enfriamiento de Newton.<br>• Limitaciones de la Ley de enfriamiento. |
| Ecuación diferencial que explica el modelo | $y'(t) = 0.0012\, y(t)(100 - y(t))$<br>Con $y(0) = 10$ | $y'(t) = -0.00012\, y(t)$<br>Con $y(0) = 100$ | $y'(t) = 0.28768\,(22 - y(t))$<br>Con $y(0) = 37$ |
| Polinomio de Taylor a usar | $T_5(t)$ con centro 0. | $T_5(t)$ con centro 0. | $T_5(t)$ con centro 0. |
| Condiciones de graficación | Dominio [-50, 50]<br>Codominio de [0, 100] | Dominio [0, 20 000]<br>Codominio de [0, 100] | Dominio [0, 15]<br>Codominio de [0, 40] |
| Condición a aproximar | Conejos enfermos a las 4 semanas. | Porcentaje de carbono-14 a los 10 000 años. | Temperatura del cadáver a las 2 horas. |

**FIGURA 3**
Ejemplo del reporte final del Proyecto Corto del curso de Cálculo II.



# Modelado matemático de la propagación de una enfermedad

## Metodología

### Problema

Se tienen 100 conejos, de los cuales, 10 tienen una enfermedad contagiosa. Sea y(t) la cantidad de animales enfermos después de t semanas. Asuma una constante de proporcionalidad de 12/10000. ¿Cuál es la cantidad de conejos enfermos a las 4 semanas?

### Ley que modela el problema

En cada instante la razón de cambio instantánea de la cantidad de animales enfermos respecto al tiempo, es proporcional al producto de la cantidad de conejos enfermos y la cantidad de conejos sanos en ese momento.

### Ecuación diferencial que modela el problema

$$y'[t] = \frac{12}{10\,000}(y[t])(100 - y[t])$$

con $y[0] == 10$

### Implementación

Se utilizó polinomios de Taylor para analizar el modelo matemático del problema en estudio y su compración con los resultados con la función original. Para ello, con el programa *Mathematica* se resolvieron los enunciados que permiten modelar el problema usando polinomios de Taylor. En este caso se usó para calcular la solución de la ecuación diferencial, calcular el polinomio de Taylor, programarla ó asignarla como función, graficarla, calcular las imágenes y estimar el error, preimágenes y límites al infinito.

## Resultados y discusión

### Solución de la ecuación diferencial

$$\text{DSolve}\left[\left\{y'[t] == \frac{12}{10\,000}(y[t])(100 - y[t]), y[0] == 10\right\}, y[t], t\right]$$

resolvedor diferencial

$$\left\{\left\{y[t] \to \frac{100\, e^{3t/25}}{9 + e^{3t/25}}\right\}\right\}$$

### Graficación

$$\text{PVI} = \text{Plot}\left[\frac{100\, e^{3t/25}}{9 + e^{3t/25}}, \{t, -50, 50\}, \text{PlotRange} \to \{0, 100\}, \text{PlotStyle} \to \{\text{Magenta}, \text{Thickness}[0.01]\}\right]$$

representación gráfica · rango de representación · estilo de represen··· · magenta · grosor



# 4. Discusión

## 4.1 Valoración general de las actividades

La introducción de las TICs se ha convertido en una de las estrategias de mayor significancia en la apropiación de conocimientos en el proceso enseñanza y aprendizaje de las matemáticas universitarias [17]. Sin embargo, sistematizar y documentar las experiencias generalmente no es sencillo y, por su carácter de evolución continua, las propuestas iniciales suelen variar significativamente con el paso del tiempo y con el creciente número de implementaciones. La propuesta presentada para la enseñanza y aprendizaje del Cálculo II es resultado de ocho años de trabajo y que ha sido sometida a cambios semestre a semestre. La gestión de las diversas oportunidades de mejora en el curso de Cálculo II ha llevado a diversos replanteamientos, los cuales han incluido la introducción de una plataforma común para el desarrollo del curso (como *moodle)* así como el establecimiento de actividades ordenadas y estructuras por cada uno de los temas (laboratorios) y que se complementan con otras asignaciones para introducir, estudiar o concluir algún contenido (actividades complementarias). Además, en el mismo proceso de mejora continua y en mismo contexto de las TICs, la introducción de problemas de modelado y proyectos cortos ha favorecido el estudio de posibles aplicaciones a situaciones en el área académica de los estudiantes y la vida real.

Las diferentes actividades complementarias y laboratorios resaltan diferentes vínculos entre los conocimientos previos y el nuevo contenido, principalmente aquellos que se realizan de forma introductoria, como aquellos que permiten la comprensión de conceptos generales de polinomios de Taylor, Series Numéricas ó Coordenadas Polares (Ver Tabla 1). La introducción del lenguaje formal para la resolución de ejercicios puede ser explorado con actividades de contenido, como los aplicados en integrales impropias para el estudio de teoremas, las sucesiones recursivas o en números complejos. Por su parte, actividades como el proyecto corto, graficación y análisis de modelos de la galleta de mar con uso de coordenadas polares y la interpretación de la curva de Gauss con integrales impropias funcionan como elementos que permiten estudiar aplicaciones, posterior a la adquisición del nuevo conocimiento.

En actividades de alta complejidad, por ejemplo aquellas donde hay mucho código de programación, matemática superior o un uso de software de nivel avanzado, el docente tiene un papel primordial para guiar a los estudiantes para evitar caer en problemas de manipulación de los recursos y hacer énfasis a las interpretaciones y conjeturas. Este es el caso de los laboratorios relacionados con la graficación de las raíces de números complejos, pues requiere algunos elementos de programación, o en el caso del laboratorio de secciones cónicas relacionado con el balón de rugby, donde el docente tiene un fuerte componente de participación y las actividades son más demostrativas que de cálculos. En las demás actividades, el docente tiene diverso grado de participación dando orientación más pasiva, mientras que el aprendizaje colaborativo entre pares o compañeros se ve potenciado en las actividades relacionadas con el proyecto corto.

En conjunto, la integración de las TICs y el proyecto corto de modelado permiten la incorporación de la investigación como un elemento adicional e invaluable en el proceso enseñanza-aprendizaje, lo cual propicia el aprendizaje por descubrimiento y resalta la apropiación activa del conocimiento tanto con el estudio independiente así como el estudio y la comunicación crítica entre pares [15]. Esto pudo ser evidenciado al evaluar los diferentes pasos para la ejecución del proyecto corto, condensado en el reporte en formato de artículo científico, donde el trabajo en equipo puso a discutir, compartir ideas e hipótesis, predecir comportamientos y hacer interpretaciones, en su mayoría, correctas y válidas.

En este sentido, pese a que el estudio de modelos permite la interacción con situaciones de la vida real y tiene un gran potencial, en cursos básicos de matemática no es común contar con estrategias de este tipo, lo cual ofrece una oportunidad para innovar en la clase como fue presentado anteriormente. En cursos avanzados de matemática, o en áreas como ingeniería o economía, este tipo de estrategias son populares y están bien establecidas [18].

Sin embargo, algunas críticas podrían considerar que la simplificación excesiva, falta de conocimientos matemáticos y una interpretación ambigua podrían ser consecuencias comunes de un estudio anticipado de modelos en un curso básico, como lo es Cálculo II. Es así que para implementación de modelos como estrategia requiere de una buena planificación de los objetivos de aprendizaje, así como definir los alcances y limitaciones de la propuesta de trabajo. Lo mismo aplica para los casos en los que las herramientas o recursos demandan un conocimiento medio o alto para su uso y podrían dificultar el aprendizaje, no por el contenido mismo, sino por el tipo de estrategia usada.

## 4.2 Valoración de la experiencia desde la perspectiva del estudiante y del docente

Para realizar la valoración del estudiantado respecto a la introducción de las TICs en el curso de Cálculo II, se realizó la evaluación del curso con una encuesta con preguntas cerradas para marcar el grado de satisfacción de diferentes aspectos, así como con una pregunta abierta de opiniones y sugerencias. Las preguntas planteadas y categorizadas en temas, se muestra en la Figura 4. La encuesta fue completada por un total de 20 estudiantes, los que asistieron a la última sesión del curso. Los resultados de las preguntas cerradas son presentados en la Figura 4, en el que se muestra un mapa de calor referente al grado de satisfacción en diversas categorías evaluadas. Los valores en color crema corresponden a valores cercanos a 0%, que van aumentando del amarillo, naranja, rojo y negro, siendo este último el valor que corresponde al 100% de satisfacción.

En general, la mayoría de los aspectos cuentan con una evaluación entre alta y muy alta satisfacción, a excepción del caso que hace referencia al funcionamiento del equipo de laboratorio, debido a que computadoras particulares dieron problemas de arranque en algunas ocasiones a lo largo del semestre. Se destacan aquellas categorías relacionadas con las actividades mediadas por las TICs y el modelado matemático, mismas donde los estudiantes manifiestan gran satisfacción. Basado tanto en los resultados de la encuesta como los comentarios y actitud general de los estudiantes a lo largo de las sesiones de trabajo, resultó particularmente gratificante para los docentes que los estudiaran valoraran con mucha satisfacción la mayoría de los aspectos. Dado que la introducción de las TICs en el curso de Cálculo II cuenta con un historial de ocho años de evolución, de acuerdo al criterio de docentes, la implementación ha resultado ser favorable a nivel didáctico. La participación activa de los estudiantes, la comprensión de conceptos y algoritmos de resolución, así como el desarrollo de habilidades y competencias para la toma de decisiones se han visto beneficiados de acuerdo a la apreciación docente.

Algunas valoraciones del docente, en respuesta a la opinión de estudiantes, se pueden destacar con ejemplos concretos:

(i) Respecto a los cursos en línea, observaciones en la encuesta respecto a la plataforma *moodle* incluyó que era bueno contar con los recursos en línea y que el uso de una aplicación para el celular permitía un fácil acceso. La disponibilidad de videos con soluciones de ejercicios y los foros para consultas fueron de los aspectos más valorados por los estudiantes y que en general contó con más participación. En la encuesta de evaluación se observó un particular interés por los ejercicios presentados en video y hasta solicitaban más soluciones en ese formato. Uno de los estudiantes incluso manifestó que el uso de videos le permitió verlos mientras viajaba a su casa y que incluso usó *youtube* para buscar ejercicios similares y orientarse. Por otra parte, los cuestionarios en línea no fueron muy apoyados, pues los estudiantes mencionaron que el factor tiempo (el cuestionario tenía un límite de resolución de una hora y con cronómetro explícito en la pantalla) les representó un factor de estrés y que su solución bajo presión no era igual a tener más horas para analizar con más detalle. Basados en los registros de *moodle*, 8 de los 30 estudiantes no tuvieron intervención en la plataforma en ninguna actividad durante el último mes de lecciones, mismos que habían desertado el curso después del primer ó segundo examen parcial.

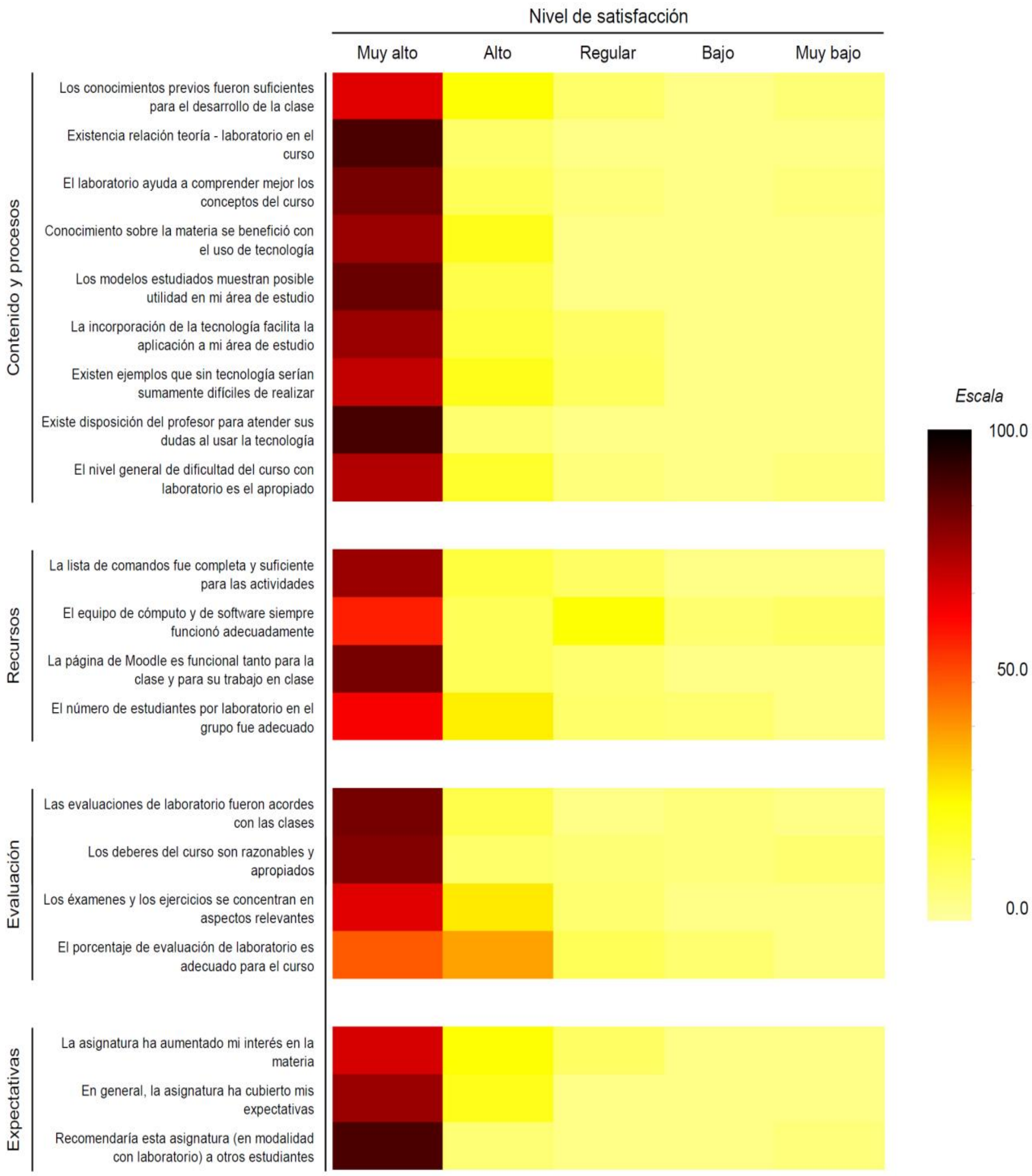
(ii) En el tema de Polinomios de Taylor, los estudiantes manifestaron tener una mejor comprensión cuando se hace uso de actividades “memorables”, los cuales permiten la instauración de conceptos mediante el reconocimiento y la exploración, como lo es la evaluación del diferente grado del Polinomio de Taylor o centro escogidos y su efecto en la aproximación con una función real. En el ejemplo estudiado en clase, se graficaron diferentes polinomios de Taylor de *Sen(x)* y se pudo comparar resultados de acuerdo al aumento del grado, o bien, el cambio del centro, y concluir que ambos son relevantes para mejorar una aproximación. Pese a que la evaluación no se centra en conceptos, sino más bien en cálculos, el uso de la lógica y dominio de contenido apoyan la toma de decisiones al plantear soluciones algebraicas.

(iii) Otras observaciones en la pregunta final de la encuesta reveló que los estudiantes criticaron positivamente el uso de gráficas en software para el estudio de integrales impropias, secciones cónicas y coordenadas polares, pues plantearon que la visualización "favorece la comprensión y se puede dar cuenta las condiciones en las que se plantea un cálculo", principalmente en referencia a áreas bajo la curva en los temas de coordenadas polares. Dado el énfasis del curso, la graficación en este tema no se realiza de forma exhaustiva con curvas complejas (se hace usualmente con círculos, caracoles, flores y rectas para no complicar los cálculos algebraicos) pero con el uso de software se pueden realizar planteamientos complejos que se resuelven de forma asistida con la computadora. Esto permitió valorar la capacidad de los estudiantes de comprender el contexto del problema y hacer inferencia en una situación donde el álgebra requerida era trabajada por el paquete computacional.

(iv) En este mismo tema, el ejemplo de la resolución del área de la galleta de mar, en el laboratorio de coordenadas polares, fue un caso de discusión. Los mismos estudiantes analizaron el efecto de usar la función $r(t)=a\ Sen(5t)$ ó $r(t)=a\ Cos(5t)$ para calcular las áreas. En la actividad, se les dio una fotografía, pero dependiendo de la posición en que la colocaban, podían usar una u otra función, sin embargo, durante el periodo de observación por parte del docente, un grupo de estudiantes argumentó que era indistinto, pues el "área daría igual, y ese era el problema a resolver y no cual posición tenía la galleta". Incluso, ante la discusión con otros estudiantes, el docente orientó para que cada uno lo hiciera con funciones diferentes (en el programa *Mathematica*) y se verificara que los valores eran iguales.

**FIGURA 4**

Mapa de calor referente a la evaluación de la satisfacción de los estudiantes en el curso de Cálculo II con incorporación de las TICs



(v) Respecto al proyecto corto, muchos estudiantes manifestaron su interés en tener más actividades para estudiar aplicaciones y entender el contexto en el que los modelos matemáticos (en este caso a pequeña escala) podrían ser usados. Esto representó algo muy positivo desde la visión del docente, pues los mismos estudiantes reconocieron que saben que el curso es muy importante en su futura profesión, pero que usualmente no conocen las aplicaciones y usos de los contenidos estudiados, y que actividades de este tipo son "formas sencillas de ver como se usa el cálculo para estudiar problemas".

Estos ejemplos, aunque no únicos, hacen que los docentes tengan una valoración positiva respecto a la implementación de las TICs en el curso. En el contexto de mejora continua en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática universitaria, diversas oportunidades de mejora siguen generándose, lo cual compromete a los docentes para seguir interviniendo y valorar la idoneidad de las diversas actividades realizadas. La versión presentada en este trabajo, incluyendo los laboratorios y actividades complementarios, han sido sometidos a evaluación constante y cambiados paulatinamente en el periodo de ocho años de la implementación. Sin embargo, los resultados en cuanto a los porcentajes de aprobación parecerían no diferir de aquellos cursos que no cuentan con la plataforma de las TICs, lo cual pone de manifiesto que no son necesariamente resultados a nivel de aprobación sino en la experiencia del cómo se desarrolla el proceso enseñanza-aprendizaje. Como ya ha sido propuesto, la discrepancia entre la incorporación de las TICs y los resultados de aprobación puede responder a los diversos factores que modulan el quehacer enseñanza-aprendizaje, lo cual pone como reto el diseño de estrategias que permitan hacer uso de prácticas educativas relevantes y eficientes de manera que impacten positivamente el proceso[3]. Así, la responsabilidad del éxito de la introducción de las TICs no recae en ellas, sino en la forma en cómo se ponen en práctica en cierto contexto.

# Conclusiones

La implementación de las TICs en el curso de Cálculo II que se presentó anteriormente es resultado de un proceso de ocho años de experiencia. Con el objetivo de hacer una separación académica, las diferentes actividades se organizaron como laboratorios, actividades complementarias y el proyecto corto de modelado, aunque muchas se correlacionan directamente o se ejecutan simultáneamente. Los laboratorios se basaron en actividades que incluyen el uso de paquetes especializados como *Mathematica*, MATLAB o Winplot, mientras que las actividades complementarias se basaron principalmente en recursos en línea, incluyendo calculadores numéricos y simuladores de modelos matemáticos. Por su parte, el proyecto corto de modelado correspondió a un tipo de laboratorio, que a diferencia de los otros, se prolongó por 4 sesiones y que finalizó con la elaboración de un reporte tipo artículo científico. Además, el proyecto se requirió el conocimiento obtenido en laboratorios anteriores, lo cual estableció una integración entre contenidos del curso y aplicaciones.

Las diferentes actividades, clasificadas además por su pertinencia temporal como de introducción, contenido y extensión, ofrecen una alternativa para la enseñanza y aprendizaje de matemática universitaria en contexto que incluye las tendencias tecnológicas en las que se desenvuelven los estudiantes, sus conocimientos previos y el uso de los nuevos para estudiar aplicaciones y modelos matemáticos. La motivación, dar un papel activo al estudiante, la comprensión de conceptos, el análisis, desarrollo de habilidades críticas y de interpretación son elementos que también se ven potenciados con la implementación propuesta.

Finalmente, los ejemplos presentados muestran como la visualización, elementos básicos de programación, cálculos y modelos pueden ser usados para favorecer el proceso enseñanza y aprendizaje del Cálculo II y de forma similar, pueden ser adaptados a otros cursos de matemática, incluyendo Ecuaciones Diferenciales, Métodos Numéricos, Cálculo I ó Cálculo Superior. La valoración de los estudiantes y docentes resultó en altos niveles de satisfacción respecto a la incorporación de las TICs en el curso de Cálculo II, aunque dado el proceso de mejora continua, aún se siguen trabajando en oportunidades que surgen en el proceso.

# Referencias


[1] M. Herrera, "Las nuevas tecnologías en el aprendizaje constructivo.," Rev. Iberoam. Educ., vol. 34, no. 4, pp. 1–20, 2004

[2] S. N. Gatica and O. E. Ares, "La importancia de la visualización en el aprendizaje de conceptos matemáticos," EDMETIC, vol. 1, no. 2, pp. 88–107, 2012

[3] C. Coll, "Aprender y enseñar con las TIC: expectativas, realidad y potencialidades," Boletín la Inst. Libr. Enseñanza , vol. 72, no. 11, pp. 1–23, 2008

[4] M. A. Ré, L. E. Arena, and M. F. Giubergia, "Incorporación de TICs a la enseñanza de la Física: Laboratorios virtuales basados en simulación," TE Rev. Iberoam. Tecnol. en Educ. y Educ. en Tecnol., vol. 8, pp. 16–22, 2012

[5] S. Castillo, "Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática," Rev. Latinoam. Investig. en matemática Educ., vol. 11, no. 2, pp. 171–194, 2008

[6] J. Ángel and G. Bautista, "Didáctica de las matemáticas en enseñanza superior: la utilización de software especializado," 2001

[7] A. L. Alfaro, M. Alpízar, and E. Chaves, "Recursos metodológicos utilizados por docentes

de I y II ciclos de la educación general básica en la Dirección Regional de Heredia, al impartir los temas de probabilidad y estadística," Uniciencia, vol. 26, no. 1y2, pp. 135–151, Mar. 2012

[8] G. Chavarría-Arroyo, "Dificultades en el aprendizaje de problemas que se modelan con ecuaciones lineales: El caso de estudiantes de octavo nivel de un colegio de Heredia," Uniciencia, vol. 28, no. 2, pp. 15–44, 2014

[9] J.-A. Molina-Mora, "Experiencia basada en la triada TICs, enseñanza por proyectos y modelado para la enseñanza de sistemas de ecuaciones diferenciales," Uniciencia, vol. 29, no. 2, pp. 46–61, 2015

[10] Z. Paredes, M. Iglesias, and J. Ortiz, "Los docentes y su formación inicial hacia el aula de matemática. Una propuesta con modelización y nuevas tecnologías," REICE. Rev. Iberoam. sobre Calidad, Efic. y Cambio en Educ., vol. 7, no. 1, pp. 85–102, 2009

[11] T. Lara, Mlearning. Cuando el Caballo de Troya entró en el aula. 2012

[12] E. De Faria, "Uso de tecnologías digitales en la educación matemática en Costa Rica," Uniciencia, vol. 20, no. 1, pp. 135–145, 2003

[13] J. Perdomo, "Módulo de enseñanza para la introducción de las ecuaciones diferenciales ordinarias en un ambiente de resolución de problemas con tecnología," Números, vol. 78, pp. 113–134, 2011

[14] D. Macias Ferrer, "Las nuevas tecnologías y el aprendizaje de las matemáticas," Rev. Iberoam. Educ., vol. 42, no. 4, pp. 1–17, 2007

[15] Y. Morales López and O. Salas Huertas, "Incorporación de la tecnología para la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)," Cuad. Investig. y Form. en Educ. Matemática, vol. 5, no. 6, pp. 155–172, 2010

[16] C. Cerda, "Elementos a considerar para integrar tecnologías del aprendizaje de manera eficiente en el proceso enseñanza-aprendizaje," Estud. pedagógicos, vol. 28, pp. 179–191, 2002

[17] L. N. Villamizar-Herrera, W. Montenegro-Velandia, and J. Salvador-Poveda, "Revisión teórica sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas," Rev. Virtual Univ. Católica del Norte, vol. Vol.1, no. 35, pp. 254–287, 2012

[18] C. Cruz, "La enseñanza de la modelación matemática en ingeniería," Rev. la Fac. Ing., vol. 25, no. 3, pp. 39–46, 2010

*Dirección de Contacto del Autor*:

Jose Arturo Molina Mora
Universidad de Costa Rica
San Pedro de Montes de Oca (30305)
San José, Costa Rica
e-mail:jose.molinamora@ucr.ac.cr

**Jose Arturo Molina Mora**

Docente e investigador de la Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica. Obtuvo su título de Magíster en Bioinformática y Biología de Sistemas, la Licenciatura en Microbiología y Bachillerato en Enseñanza de la Matemática.