

Interpretación geométrica de la integral doble en el espacio utilizando GeoGebra

Geometric Interpretation of the Double Integral in 3D using GeoGebra

Marco Antonio Ayala Chauvin¹, Richard Leonardo Luna Romero¹

¹ Universidad Técnica Particular de Loja, Loja, Ecuador

maayala5@utpl.edu.ec, rluna@utpl.edu.ec

Recibido: 04/01/2024 | Corregido: 08/05/2024 | Aceptado: 10/05/2024

Cita sugerida: M. A. Ayala Chauvin, R. L. Luna Romero, "Interpretación geométrica de la integral doble en el espacio utilizando GeoGebra," *Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*, no. 39, pp. 129-135, 2024. doi:10.24215/18509959.39.e13.

Esta obra se distribuye bajo Licencia Creative Commons CC-BY-NC 4.0

Resumen

Las dificultades cognitivas observadas en los estudiantes, a la hora de abordar los conceptos del Análisis Matemático Multivariado, provienen de la no articulación entre las diferentes representaciones de un mismo objeto matemático, particularmente entre el registro algebraico y su respectiva representación geométrica en las integrales dobles, imponiéndose, consecuentemente, la utilización de técnicas algebraicas sin comprender los conceptos. Con base en la Teoría de los Registros de Representación Semiótica, se propone el uso de una secuencia didáctica utilizando GeoGebra. Para su diseño se eligió una aplicación contextualizada a la ingeniería civil y luego se generó una secuencia de actividades donde se exploró el objeto matemático desde un registro gráfico hasta un registro algebraico, es decir, el estudiante parte de elementos geométricos tridimensionales del registro gráfico de un "sólido" para luego realizar la articulación de representación al registro algebraico de la integral doble para luego resolver la aplicación. Finalmente, la secuencia didáctica fue evaluada afirmativamente en aspectos como la comprensión geométrica del objeto matemático y la pertinencia de las características de la secuencia didáctica.

Palabras clave: Integral doble; Registros semióticos; Objeto matemático; Secuencia didáctica.

Abstract

The cognitive difficulties observed in the students, at the time of approaching the concepts of Multivariate Mathematical Analysis, come from the lack of articulation between the different representations of the same mathematical object, particularly between the algebraic register and its respective geometric representation in the double integrals, imposing, consequently, the use of algebraic techniques without understanding the concepts. Based on the Theory of Semiotic Representation Registers, the use of a didactic sequence using GeoGebra is proposed. For its design, an application contextualized to civil engineering was chosen and then a sequence of activities was generated where the mathematical object was explored from a graphic register to an algebraic register, that is, the student starts from three-dimensional geometric elements of the graphic register of a "solid" to then perform the articulation of representation to the algebraic register of the double integral to then solve the application. Finally, the didactic sequence was evaluated affirmatively in aspects such as the geometric comprehension of the mathematical object and the pertinence of the characteristics of the didactic sequence.

Keywords: Double integral; Semiotic registers; Mathematical object; Didactic sequence.

1. Introducción

Los estudiantes de ingeniería que toman asignaturas de matemáticas durante el primer y segundo año de sus carreras adquieren conocimientos de cálculo que sirven de base para otras asignaturas vinculadas a su malla curricular. Por consiguiente, para que tengan éxito en sus carreras y en su futuro ejercicio profesional, es esencial que comprendan estos conceptos matemáticos y sean capaces de interpretarlos y aplicarlos en asignaturas futuras.

El análisis matemático multivariado es una asignatura de gran importancia que permite modelizar una amplia variedad de fenómenos presentes en las ciencias, matemáticas, ingeniería y otras disciplinas. Por este motivo, en los últimos años ha aumentado el interés por la enseñanza y aprendizaje del cálculo de funciones multivariantes, sobre todo de las funciones de dos variables [1].

Generalmente cuando se presentan conceptos matemáticos a los estudiantes por parte del docente, se recurre a definiciones formales, prestando poca importancia a su representación geométrica [2]. De este modo, para el docente surgen varios desafíos, de los cuales, según Dreyfus y Kouropatov [3], hay dos fenómenos muy divulgados en la literatura. El primero consiste en el desarrollo de cursos de matemáticas que centran el proceso de enseñanza-aprendizaje en el empleo de algoritmos y fórmulas, dejando a un lado lo importante del significado matemático en la modelización; y el segundo es el desacople que existe entre los diferentes registros de representación relacionados con el objeto matemático, que para este caso sería la integral doble.

Durante las últimas décadas, se ha producido en el mundo un crecimiento vertiginoso de la tecnología que ha supuesto la introducción y el diseño de softwares educativos en todos los centros de enseñanza [4]. En este sentido, se ha podido evidenciar cómo la incorporación de GeoGebra en la enseñanza-aprendizaje del área de matemáticas favorece el rendimiento y el interés de los estudiantes [5].

Lo anterior ha motivado el desarrollo de esta investigación, cuyo objetivo es profundizar en el tratamiento y conversión de los registros de representación semiótica que los estudiantes de ingeniería civil de la Universidad Técnica Particular de Loja deben realizar sobre la "integral doble" para apropiarse de su significado, apoyándose en el software GeoGebra. Puesto que se ha considerado que existen dificultades en la comprensión de las distintas representaciones empleadas para la construcción del significado geométrico de la integral doble; para lo cual se recurre a la utilización de elementos de la Teoría de las Representaciones Semióticas de Duval [6] y a la aplicación de un diseño didáctico referido al uso de registros de representación.

2. Fundamentación Teórica

2.1. Registros de Representaciones Semióticas

Esta experiencia didáctica se fundamentó en la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas de Raymond Duval. Según esta teoría, la actividad matemática hace uso de varios registros semióticos, como el registro gráfico, algebraico, aritmético, entre otros. Estos registros son herramientas que los estudiantes utilizan para interpretar, comunicar y construir significados matemáticos. Sin embargo, se selecciona solo uno de ellos según el propósito de la actividad. En este estudio, se parte del registro gráfico, luego se hace una conversión al registro algebraico para calcular el volumen de un sólido mediante la integral doble. Esto implica la necesidad de una coordinación interna entre los registros de representación. Sin esta coordinación, dos representaciones diferentes pueden significar dos objetos matemáticos diferentes, sin relación alguna entre ellos, incluso si corresponden a dos "contextos de representación" diferentes del mismo objeto [7].

Esta actividad matemática referente a la obtención de representaciones se llama semiosis, mientras que la apropiación de conceptos matemáticos se la conoce como noesis. La actividad cognitiva de formación de una representación se refiere a una expresión de una representación mental, la actividad cognitiva de tratamiento es el cambio de una representación semiótica desde de un mismo registro, y finalmente la actividad cognitiva de conversión es el cambio de representaciones semióticas de un registro a otro registro [6].

La coordinación de registros de representaciones semióticas requiere proponer una tarea secuencial que facilite la exploración sistemática de las variaciones del objeto matemático para su comprensión.

En el estudio de la integral doble se parte del registro gráfico como se muestra en la figura 1.

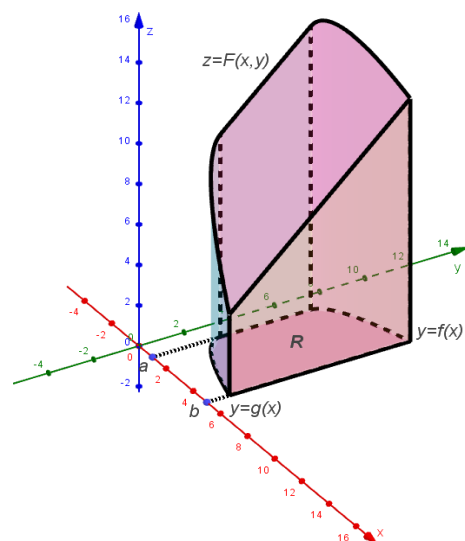


Figura 1. Registro gráfico de la integral doble

Del registro gráfico se identifica la región sobre la cual se va a calcular la integral doble, de esta manera el registro algebraico de la región es:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

Una vez identificado los límites de integración se realiza la conversión del registro gráfico al registro algebraico de la integral doble, lo cual queda expresado de la siguiente manera:

$$V = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=g(x)}^{y=f(x)} F(x, y) dy dx$$

La serie de operaciones algebraicas que se realiza dentro del registro algebraico hasta llegar al resultado de la integral doble se denomina tratamiento.

3. Metodología

Para dar respuesta al objetivo de esta investigación se llevaron a cabo 3 etapas:

Etap 1. Apropiación de aprendizajes previos necesarios para la secuencia didáctica.

En esta etapa se enseñó los conceptos necesarios para poder comprender geoméricamente en el espacio tridimensional un sólido, es decir, comprensión de la región en 2D y funciones de dos variables en 3D como plano y funciones cuadráticas, sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas, luego se abordó el concepto de Integral doble y la parte de visualización se llevó a cabo con el software GeoGebra. Esta etapa se llevó en 12 semanas, de un total de 18 semanas del semestre de análisis matemático multivariado, con reuniones de 5 horas semanales, de las cuales se utilizó 3 horas para las actividades de la secuencia. Se puede acceder a las clases en el siguiente link: <https://bit.ly/3LgE6F4>

Etap 2. Diseño e implementación de una secuencia didáctica.

Luego de la enseñanza de los contenidos necesarios, se diseñó la secuencia didáctica tomando como base una aplicación de ingeniería donde los estudiantes hicieron uso de esos conocimientos previos. En el grupo experimental, esta secuencia se abordó desde la representación gráfica dinámica de un sólido diseñado en GeoGebra hasta llegar a la conversión de la representación algebraica, mientras que en el grupo control se trabajó con una representación estática de los gráficos hasta llegar al registro algebraico del volumen del sólido.

En cuanto al grupo experimental y al grupo de control, se partió de una población de 200 estudiantes inscritos en la asignatura de Análisis Matemático Multivariado de la carrera de Ingeniería Civil, distribuidos en 4 grupos de 50 estudiantes cada uno, establecidos previamente por la universidad. De estos grupos, se seleccionaron dos al azar, tomando 35 estudiantes para conformar el grupo experimental y 35 para el grupo de control, totalizando así una muestra de 70 estudiantes. Esta muestra se considera probabilística, siguiendo la definición de Hernández et al.

[8], donde en las muestras de este tipo, la probabilidad de que todos los elementos o grupos de la población sean seleccionados para la muestra, mediante una selección aleatoria, es la misma.

Ambas secuencias didácticas tienen como enunciado lo siguiente: "Plantear una integral doble a partir del sólido y encontrar su volumen:". Este enunciado va acompañado de la representación dinámica del sólido para el grupo experimental, mientras que en el grupo control solo va una captura pantalla de la imagen del GeoGebra, es decir un gráfico estático; mirar la Figura 2.

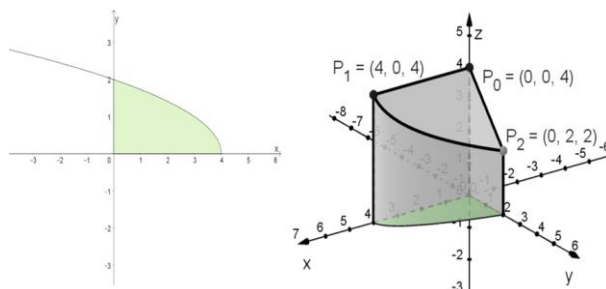


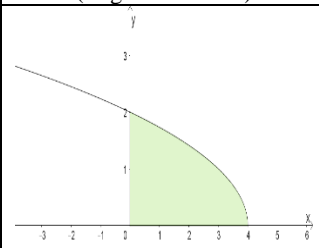
Figura 2. Región en 2D y sólido en 3D

Generalmente algunos de los planteamientos de los docentes parten de un registro algebraico al registro aritmético [9], es decir, el estudiante solamente resuelve una integral doble perdiendo totalmente la comprensión geométrica.

En el planteamiento de la aplicación el estudiante se encuentra familiarizado con esta construcción del sólido de la figura 2 ya que hace parte de las construcciones en ingeniería civil.

La primera actividad de coordinación que realizó el estudiante es la actividad cognitiva de conversión del registro gráfico de la "región en 2D", al registro algebraico, encontrando así los "límites de integración", como se puede observar en Tabla 1.

Tabla 1. Conversión del registro gráfico la "región en 2D", al registro algebraico de los "límites de integración"

Región en 2D (Registro Gráfico)	Límites de integración (Registro Algebraico)
	$0 \leq x \leq 4$ $0 \leq y \leq \sqrt{4-x}$

Los límites de integración se tomaron como una región del Tipo I, sin embargo, el estudiante puede optar por hacerlo como una región del Tipo II. Esto implica una actividad cognitiva de tratamiento dentro del mismo registro algebraico como se puede apreciar en la Tabla 2.

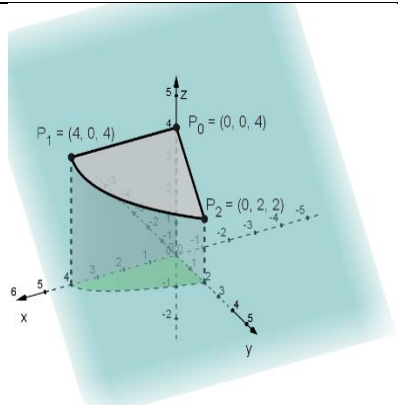
Tabla 2. Actividad cognitiva de tratamiento dentro del registro algebraico

Representación algebraica del Tipo I de la región propuesta	Representación algebraica del Tipo II de la región propuesta
$0 \leq x \leq 4$ $0 \leq y \leq \sqrt{4-x}$	$0 \leq y \leq 2$ $0 \leq x \leq 4 - y^2$

La siguiente conversión de registro gráfico a algebraico hace referencia a encontrar la "tapa del sólido", en este caso particular la ecuación de un plano. Para ello el rol de la geometría tridimensional juega un papel fundamental. La determinación de la ecuación general del plano implica que el estudiante debe conocer los elementos necesarios para su planteamiento.

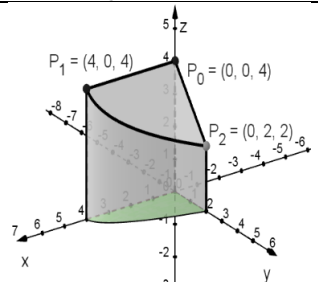
Se determinó la ecuación del plano a partir de tres puntos, proceso conocido por el estudiante en la etapa 1; esto se observa en la Tabla 3.

Tabla 3. Conversión del registro gráfico de "el plano en 3D", al registro algebraico de "la ecuación general del plano"

El plano en 3D (Registro Gráfico)	Ecuación general del plano (Registro Algebraico)
	$z = 4 - y$

Luego, con toda la coordinación de Registros anteriores se lleva a cabo la última conversión del registro gráfico "el sólido", al registro algebraico "la integral Doble", esto se muestra en la Tabla 4

Tabla 4. Conversión del registro gráfico de "el sólido", al registro algebraico "la integral"

El sólido (Registro Gráfico)	Integral (Registro Algebraico)
	$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-x}} (4-y) dy dx$

El estudiante también pudo haber planteado el volumen mediante una integral doble en una región de tipo II, es decir otro tipo de tratamiento dentro del registro algebraico, como se muestra en la tabla 5.

Tabla 5. Actividad cognitiva de tratamiento dentro del registro algebraico del Volumen del sólido

Representación algebraica del volumen por medio de una integral doble del Tipo I	Representación algebraica del volumen por medio de una integral doble del Tipo II
$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-x}} (4-y) dy dx$	$\int_0^2 \int_0^{4-y^2} (4-y) dx dy$

Con la integral planteada ya se puede resolver la aplicación y encontrar el volumen del sólido, es decir llevarlo a un registro aritmético.

Con el grupo en que se trabajó con GeoGebra (Grupo Experimental) se creó dos applets para el cálculo de volúmenes sobre regiones del Tipo I y Tipo II, con el fin de poder visualizar y manipular la gráfica tridimensional del volumen y comprobar su respectivo planteamiento y resultado a través de integrales dobles. Estos applets se muestran en las figuras 3 a 6 y se encuentran en el siguiente enlace: <https://shorturl.at/gryZ6>

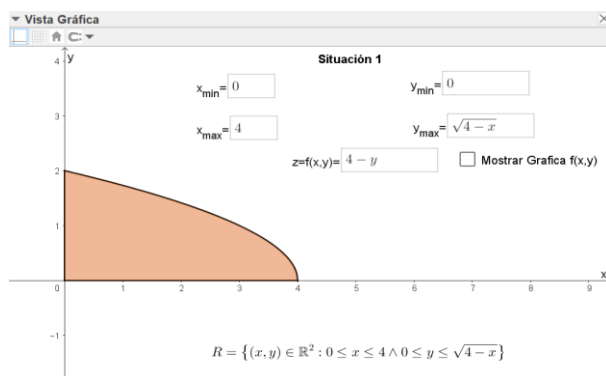


Figura 3. Ingreso de datos en el applet para cálculo de volúmenes por medio de integrales dobles del Tipo I

$$Volumen = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-x}} (4-y) dy dx = 17.3333$$

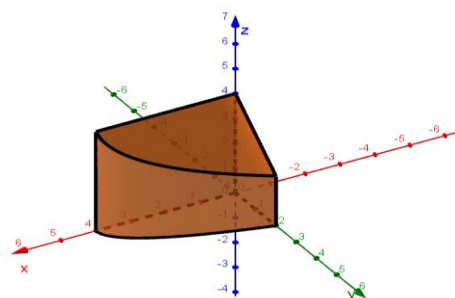


Figura 4. Registro gráfico y algebraico del applet para cálculo de volúmenes por medio de integrales dobles del Tipo I

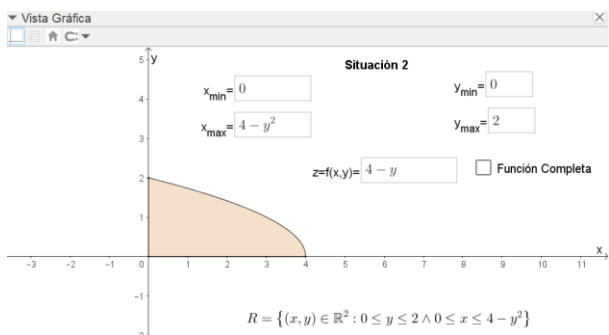


Figura 5. Ingreso de datos en el applet para cálculo de volúmenes por medio de integrales dobles del Tipo II

$$Volumen = \int_0^2 \int_0^{4-y^2} (4-y) dx dy = 17.3333$$

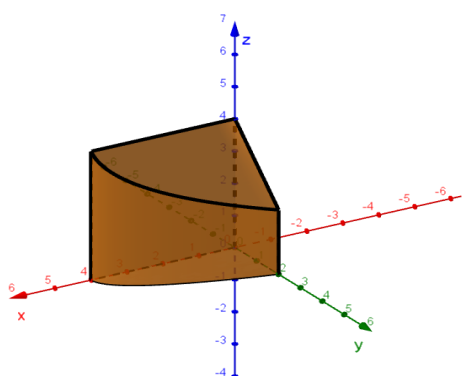


Figura 6. Registro gráfico y algebraico del applet para cálculo de volúmenes por medio de integrales dobles del Tipo II

Dichos applets se utilizaron al momento de plantear las integrales para determinar los límites de integración y para comprobar el resultado de las tareas desarrolladas.

Como se muestra en las figuras 3 y 5, los parámetros de entrada de los applets pueden ser cualquier región de tipo I o de tipo II que se encuentran en coordenadas cartesianas, mientras que la función de ingreso de dos variables puede ser cualquier función siempre y cuando dicha función esté definida en la región y sea mayor que cero, dando como resultado la gráfica y el valor del volumen como se muestra en las figuras 4 y 6. Esto hace que el estudiante pueda ingresar cualquier integral doble en coordenadas cartesianas y así poder comprobar su resultado, ayudando en la comprensión del concepto en estudio.

Etap 3. Evaluación de la secuencia didáctica.

Para la evaluación de la secuencia tanto del grupo experimental como el de control se tuvo en cuenta los siguientes puntos de la tabla 6.

Tabla 6. Evaluación de la Secuencia didáctica

Realizaron la coordinación de registros correctamente límites de integración, plano y resolvieron la integral	sin errores algebraicos
	con errores algebraicos
Realizaron la coordinación de registros correctamente sólo límites de integración y plano	sin errores algebraicos
	con errores

	algebraicos
Realizaron la coordinación de registros correctamente sólo los límites de integración	sin errores algebraicos
	con errores algebraicos

Una vez que se evaluó a los dos grupos de 35 estudiantes, se utilizó el software SPSS para el análisis estadístico descriptivo de los resultados, así como para realizar las pruebas estadísticas de Normalidad y la prueba paramétrica t de Student para grupos independientes. Dicha prueba se aplica si los resultados de la evaluación poseen una distribución normal, el tamaño de la muestra es mayor o igual que 30 y existe homogeneidad en la varianza [10]. Esto permite conocer si el uso de GeoGebra en la interpretación geométrica de la integral doble en el espacio incide en el rendimiento académico de los estudiantes a los que se les implementó la secuencia didáctica.

4. Resultados

Los resultados de la evaluación una vez empleada la secuencia didáctica a un total de 70 estudiantes de ingeniería civil, de los cuales 35 forman parte del grupo experimental y 35 del grupo de control se muestra en la figura 7.

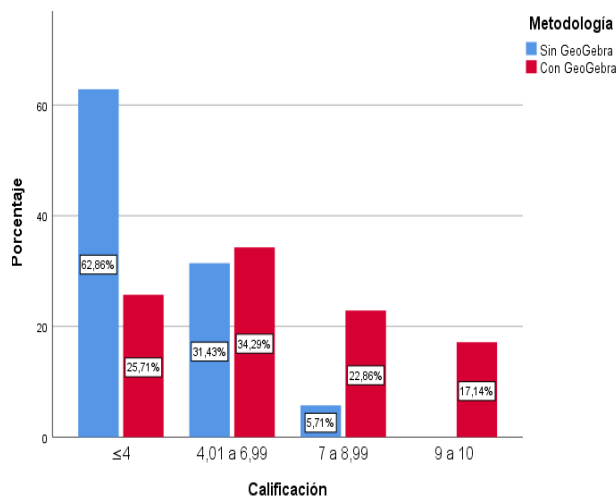


Figura 7. Resultados evaluación del grupo experimental-control

A partir de este gráfico comparativo se observa que los resultados obtenidos en grupo experimental son mejores en comparación con el grupo de control, debido a que en el grupo experimental las notas menores o iguales a 4 son del 25,71% frente a un 62,86% del grupo control, es decir existen menos estudiante con notas menores o iguales a 4 en el grupo experimental que en el grupo control. Por otro lado, existe un número mayor de estudiantes con notas entre 7 y 8,99 en el grupo experimental que en el de control, es decir un 22,86% en el grupo experimental frente a un 5,71% del grupo control. Por último, en el grupo control no existe ningún estudiante con notas mayores o iguales a 9, mientras que en grupo

experimental existe un 17,14% del total de estudiantes con notas mayores o iguales a 9.

Para poder afirmar que el uso de GeoGebra incide significativamente en la mejora del rendimiento académico de los estudiantes de esta investigación se procedió a realizar una prueba estadística paramétrica con el fin de determinar si existe una diferencia significativa en los dos grupos de estudio. Para esto primero se realizó la prueba de normalidad en los resultados obtenidos en los dos grupos de estudio (tabla 7).

Tabla 7. Pruebas de Normalidad

	Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.
Resultados sin GeoGebra	0,940	35	0,054
Resultados con GeoGebra	0,935	35	0,053

Considerando una significancia de 0,05 y comparando este valor con los p valores de la tabla, resulta que estos valores, los cuales son 0,054 para el grupo experimental y 0,053 para el grupo control son mayores al valor 0,05 de la significancia, lo que significa que las calificaciones de los dos grupos de estudio poseen una distribución normal [11].

Una vez comprobado que las calificaciones poseen una distribución normal, el siguiente paso es aplicar la prueba estadística paramétrica t de Student para muestras independientes, misma que se muestra en la tabla 8.

Tabla 8. Prueba T para la igualdad de medias

		gl	Sig. (bilateral)
Calificación	Se han asumido varianzas iguales	68	,000
	No se han asumido varianzas iguales	65,43	,000

Al igual que en la prueba de normalidad se ha considerado una significancia de 0,05; por lo que al comparar el valor de la significancia bilateral de 0,000 de la tabla 8 con el valor de la significancia considerada, este es menor. Esto prueba estadísticamente que el uso del GeoGebra en la interpretación geométrica de la integral doble en el espacio incide positivamente en la mejora del rendimiento académico de los estudiantes de análisis matemático multivariado de la carrera de ingeniería civil.

Conclusiones

La implementación de la secuencia didáctica con GeoGebra incidió positivamente en el estudio de la integral doble aportando una mejora en la comprensión geométrica por medio de la coordinación de registros y de la geometría dinámica que posee este software.

Ambas secuencias didácticas permitieron explorar el objeto matemático desde el Registro Gráfico al Registro Algebraico poniendo en evidencia que el rol de la geometría tridimensional es esencial para poder realizar la coordinación de registros.

A pesar de que hubo "errores algebraicos" en la solución de la integral, la comprensión del objeto matemático se evidencio en los resultados de la evaluación, sobre todo en el grupo experimental, que fueron superiores a los resultados del grupo control.

El carácter dinámico del aplicativo GeoGebra incidió en mejorar la comprensión del concepto matemático, debido a que en los applets los estudiantes pudieron observar y manipular el sólido al que se deseaba calcular su volumen. Además, pudieron darse cuenta si están ingresando de manera adecuada los límites de integración que conforma la región R que delimita al sólido. Por último, los estudiantes pudieron observar si la función de dos variables que están ingresando está definida en la región R y si ésta es mayor que cero cuando se desea integrar sobre dicha región.

Referencias

- [1] R. Martínez-Planell y M. Trigueros, "Multivariable calculus results in different countries," *ZDM – Mathematics Education*, vol. 53, no. 3, pp. 695–707, 2021, doi: 10.1007/s11858-021-01233-6.
- [2] S. A. Widodo, Istiqomah, Leonard, A. Nayazik, y R. C. I. Prahmana, "Formal student thinking in mathematical problem-solving", *J Phys Conf Ser*, vol. 1188, no. 1, p. 012087, 2019, doi: 10.1088/1742-6596/1188/1/012087.
- [3] T. Dreyfus, A. Kouropatov, y G. Ron, "Research as a resource in a high-school calculus curriculum", *ZDM – Mathematics Education*, vol. 53, no. 3, pp. 679–693, 2021, doi: 10.1007/s11858-021-01236-3.
- [4] L. Singh, "Impact of Using Geogebra Software on Students' Achievement in Geometry: A Study at Secondary Level", mar. 2019.
- [5] Y. A. Wassie y G. A. Zergaw, "Some of the potential affordances, challenges and limitations of using GeoGebra in mathematics education", *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, vol. 15, no. 8, 2019, doi: 10.29333/ejmste/108436.
- [6] R. Duval, *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. en Exploration. Recherches en sciences de l'éducation. Bern: Peter Lang, 1995.
- [7] R. Duval, "A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 61, no. 1, pp. 103–131, 2006, doi: 10.1007/s10649-006-0400-z.

[8] R. Hernández, C. Fernández, y P. Baptista, *Metodología de la Investigación*, 6a ed. México: MacGraw Hill, 2014.

[9] K. Vigo Ingar, *El Teorema fundamental del cálculo en el contexto de la teoría de registros de representación semiótica con estudiantes de ingeniería*. Milla Ltda., 2021.

[10] M. L. Bautista, E. Victoria, L. B. Vargas, y C. C. Hernández, "Pruebas estadísticas paramétricas y no paramétricas: su clasificación, objetivos y características", *Educación y Salud Boletín Científico Instituto de Ciencias de la Salud Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo*, vol. 9, no. 17, pp. 78–81, dic. 2020, doi: 10.29057/icsa.v9i17.6293.

[11] R. Hernández y C. P. Mendoza, *Metodología de la investigación: las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*. McGRAW-HILL INTERAMERICANA EDITORES, S.A. de C. V., 2018.

Información de Contacto de los Autores:

Marco Antonio Ayala Chauvin
Universidad Técnica Particular de Loja
Loja
Ecuador
maayala5@utpl.edu.ec
<https://investigacion.utpl.edu.ec/es/maayala5>
<https://orcid.org/0000-0002-0084-6773>

Richard Leonardo Luna Romero
Universidad Técnica Particular de Loja
Loja
Ecuador
rluna@utpl.edu.ec
<https://orcid.org/0009-0008-8832-7898>

Marco Antonio Ayala Chauvin

Magister en Educación Matemática, Docente de la Maestría de Educación mención Enseñanza de la Matemática de la UTPL componente: Didáctica del Cálculo y Análisis Geométrico y trigonométrico. Docente a nivel de pregrado de la UTPL.

Richard Leonardo Luna Romero

Magister en Educación Mención Enseñanza de la Matemática, Docente del Ministerio de Educación del Ecuador en las asignaturas de Física y Matemática a nivel de Bachillerato.