Artículos originales

Modelagem matemática em problemas da OBMEP: a visualização geométrica com aporte do software GeoGebra

Mathematical modeling in OBMEP problems: geometric visualization using GeoGebra software

Renata Teófilo de Sousa[1], Paulo Vítor da Silva Santiago[2], Francisco Régis Vieira Alves[3]

[1] Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, Brasil
[2] Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Brasil
[3] Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, Brasilniversidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, São Paulo, Brasil

rtsnaty@gmail.com, pvitor60@hotmail.com, fregis@ifce.edu.br

Recibido: 14/08/2021 | **Corregido:** 27/02/2022 | **Aceptado**: 23/03/2022

Cita sugerida: R. T. de Sousa, P. V. da S. Santiago and F. R. V. Alves, “Modelagem matemática em problemas da OBMEP: a visualização geométrica com aporte do software GeoGebra,” *Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*, no. 32, pp. 34-43, 2022. doi: 10.24215/18509959.32.e4

Esta obra se distribuye bajo **Licencia Creative Commons CC-BY-NC 4.0**

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar uma proposta didática que explora a resolução de duas questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, a partir do desenvolvimento de habilidades de visualização e raciocínio geométrico com suporte do software GeoGebra. Como metodologia para seu desenvolvimento adotou-se a Engenharia Didática em suas duas primeiras fases - análises preliminares e análise a priori - em que foram levantados os obstáculos epistemológicos e didáticos no ensino de Geometria, bem como apresentada uma proposta didática com a modelagem de dois problemas extraídos da referida olimpíada, tratando do assunto de planificação de sólidos geométricos, com o software GeoGebra. Por fim, espera-se que este trabalho possa ser um norte ao professor de Matemática, no que diz respeito ao seu trabalho no campo da Geometria, bem como uma possibilidade para que o estudante desenvolva o pensamento geométrico a partir da visualização, em problemas matemáticos que não necessitam de cálculos manuais, mas apenas a percepção da geometria.

Palavras-chave: Geometria; Visualização; GeoGebra; Modelagem Matemática.

Abstract

The objective of this work is to present a didactic proposal that explores the resolution of two issues of the Brazilian Public Schools Mathematics Olympiad, from the development of visualization skills and geometric reasoning supported by GeoGebra software. As a methodology for its development, Didactic Engineering was adopted in its first two phases - preliminary analysis and a priori analysis - in which the epistemological and didactic obstacles in the teaching of Geometry were raised, as well as a didactic proposal was presented with the modeling of two problems extracted from the referred Olympiad, dealing with the subject of planning of geometric solids, with the GeoGebra software. Finally, it is expected that this work can be a guide for the mathematics teacher, with regard to his work in the field of Geometry using this software, as well as a possibility for the student to develop geometric thinking from the visualization, in mathematical problems that do not require manual calculations, but only the perception of geometry.

Keywords: Geometry; Visualization; GeoGebra; Mathematical modeling.

1. Introdução

Nos currículos escolares da disciplina de Matemática comumente aparecem orientações para o trabalho no campo da Geometria, reforçando a importância do desenvolvimento de competências e habilidades geométricas, a partir da visualização, da argumentação e formulação de hipóteses lógicas e da compreensão de figuras geométricas. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) reforça a importância da visualização, entre outras habilidades, para a elaboração de conjecturas e a prática de expressar e/ou comunicar ideias e estratégias [1].

Nesse sentido, os autores [2] apontam que o GeoGebra enquanto recurso tem potencial para agregar à prática docente do professor, facilitando seu trabalho, principalmente no que diz respeito à apresentação de conteúdos de complexa assimilação, facilitando a compreensão do aluno por meio da visualização geométrica.

Além do uso do GeoGebra, também vale ressaltar a importância da modelagem matemática em questões de Geometria, para facilitar o desenvolvimento do estudante no que diz respeito à assimilação e reflexão sobre os tópicos abordados. O autor [3] reforça que a aplicação de modelos geométricos estimula o interesse do aluno pelo assunto da disciplina, através de atividades significativas e prazerosas, despertando uma curiosidade no aluno sobre como a Geometria funciona em seu cotidiano.

É comum, enquanto docentes, nos depararmos com as dificuldades dos estudantes na compreensão da Geometria. Os estudantes em alguns casos apresentam dificuldades na construção do raciocínio geométrico, havendo a necessidade do conhecimento de teoremas e axiomas previamente estudados, bem como a relação existente entre eles. No entanto, é comum a associação da resolução de problemas em geometria ao uso de fórmulas e algoritmos prontos, o que pode não estimular de fato uma evolução do raciocínio do estudante a partir da compreensão visual.

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) comumente utiliza em suas provas questões que envolvem mais que o mero uso sistemático de fórmulas para a resolução de problemas, no que tange à Geometria. Isso reforça a importância da compreensão e do desenvolvimento de habilidades geométricas, enfatizando a visualização e a generalização de teoremas.

Nesse sentido, questiona-se: é possível desenvolver as habilidades de raciocínio geométrico dos alunos em questões de olimpíadas, com base na visualização geométrica por um *software* de Geometria dinâmica como o GeoGebra?

Assim, traça-se como objetivo para este trabalho apresentar uma proposta didática que explora a resolução de questões da OBMEP, a partir do desenvolvimento de habilidades de visualização e raciocínio geométrico com suporte do *software* GeoGebra.

Para atingir os objetivos deste trabalho, adotou-se a Engenharia Didática (ED) como metodologia norteadora do processo, em suas duas primeiras fases - análises preliminares e análise *a priori* - tendo em vista que este trabalho se configura em uma pesquisa inicial. A ED foi escolhida, pois, é uma metodologia que traz “a opção por uma perspectiva sistemática de preparação, de concepção, de planejamento, de modelização e, possivelmente, a execução e/ou replicação de sequências estruturadas de ensino” [4]

A partir do exposto, nas próximas seções apresentam-se as análises preliminares deste trabalho, abordando os obstáculos epistemológicos e didáticos na visualização geométrica, a importância da modelagem matemática e seu uso com o *software* GeoGebra, a análise *a priori* com a proposta didática deste trabalho, bem como as considerações dos autores.

2. Análises preliminares

Nesta seção é descrita, de forma breve, uma análise preliminar a partir de autores que apontam a importância das olimpíadas na escola e, em particular a OBMEP, os obstáculos epistemológicos e didáticos na visualização geométrica, bem como a modelagem matemática com o GeoGebra, sendo base teórica para este trabalho.

2.1. Uma contextualização sobre olimpíadas de matemática: a OBMEP no contexto brasileiro

De acordo com [5] as competições olímpicas no campo da Matemática podem proporcionar um maior engajamento dos estudantes na disciplina, acarretando um crescimento em seu aprendizado, bem como um aprimoramento em sua habilidade de resolver problemas. Além disso, há uma motivação e interesse do aluno em participar, pois conforme [6] “os problemas são apresentados de forma instigante para os alunos, abordando múltiplos aspectos matemáticos, sociais e culturais”, o que causa uma movimentação na escola, que incentiva os alunos a participarem e a se desenvolverem.

Como traz [5] as Olimpíadas de Matemática tem como objetivo incentivar o interesse, bem como desenvolver o raciocínio matemático do estudante, sendo competições realizadas em diversas escalas (mundial, nacional, regional, municipal). A princípio tais competições surgiram com o objetivo de filtrar os melhores estudantes em Matemática, oferecendo suporte financeiro para sua formação por meio de bolsas, sendo o estudante contemplado um possível candidato a contribuir para o progresso científico-tecnológico do seu país de origem [5], [6].

Dentre as diversas olimpíadas de matemática existentes, a que mais se destaca no contexto brasileiro é a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Privadas (OBMEP), que tem como foco principal incentivar os alunos para o estudo da matemática, além de buscar jovens talentos [6]. Sobre essa olimpíada [6] aponta que:

A OBMEP é um projeto a nível nacional, dirigido às escolas públicas (e atualmente também às escolas privadas) brasileiras, organizado e realizado pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), sendo uma competição em larga escala promovida com recursos do Ministério da Educação e do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações (MCTIC). Segundo as informações que constam no site oficial da OBMEP [7], seus objetivos são:

Estimular e promover o estudo da Matemática; contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade; identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas; incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional; contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas; promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento [8].

O autor [8] afirma que: “o estudo sobre a Olimpíada de Matemática (...) almeja a melhoria na qualidade de Ensino da Matemática e serve como um instrumento de estímulo à busca de novos conhecimentos”. Nesse sentido, a OBMEP é considerada uma olimpíada relevante, por ser uma avaliação nacional de grande alcance de estudantes da rede pública e, atualmente, também da rede privada do Brasil, e por disponibilizar um amplo acervo de materiais para estudos, tanto para alunos quanto para professores.

Contudo, como aponta [6] ainda há muitas barreiras dos docentes de Matemática no Brasil, decorrentes de sua formação inicial e/ou continuada no tocante ao trabalho com problemas de olimpíadas em sala de aula, seja no aspecto especificamente matemático ou no pedagógico - didático, o que nos motiva a continuar a pesquisa neste tema, tendo em vista os grandes potenciais que as olimpíadas podem desenvolver no âmbito escolar.

2.2. Obstáculos Epistemológicos e Didáticos na visualização geométrica

É fato que estudantes apresentam dificuldades em compreender a Matemática como uma ciência sistematizada e organizada [9]. E no que tange à geometria, o pensar matemático relaciona-se com a visualização e a manipulação de objetos, bem como a compreensão do espaço que nos rodeia, sendo um campo da matemática em que os estudantes também apresentam bloqueios.

Os autores [10] afirmam que o pensamento visual, característica marcante no estudo da geometria, deve ser estimulado tanto quanto se estimula o pensamento algébrico. Além disso, os autores reforçam que a priorização da álgebra em detrimento da geometria reverberou no desenvolvimento de apenas uma categoria de pensamento matemático, o que mostra a necessidade de instigar formas de compreensão do pensamento geométrico em aulas de Matemática.

Já [11] aponta que existem quatro elementos fundamentais com influência direta na compreensão e consequentemente na aprendizagem da Geometria Euclidiana - plana ou espacial, são eles: o objeto, o conceito, o desenho e a imagem mental. No que diz respeito a estes elementos, deve-se também considerar a semântica que se faz presente na linguagem geométrica em problemas. Deste modo, o autor afirma ainda que a compreensão destes objetos e suas respectivas representações por meio de desenhos têm uma interferência no raciocínio procedimental e na construção do conhecimento geométrico do aluno.

O autor [12] em sua obra The Theory of Figural Concepts (A Teoria dos Conceitos Figurais) aponta que os objetos geométricos dispõem de uma natureza dual, composta por dois componentes essenciais: o conceito e a imagem. Estes conceitos, bem como a estreita relação entre eles, concebem a aprendizagem da geometria de maneira considerável. Ademais, a passagem da etapa de experimentação para a abstração demanda equilíbrio entre tais componentes, no que lhe concerne podendo ser propiciados pelo uso de softwares matemáticos, como é o caso do GeoGebra, apresentado neste trabalho.

Em complemento, os autores [13] apontam ainda sobre a perspectiva de [12] que as figuras geométricas se constituem em uma entidade mental, elaboradas a partir de um raciocínio geométrico, em que uma figura difere tanto de sua definição formal quanto de sua imagem mental e, sendo apoiada em uma percepção sensorial de uma representação particular fornecida. No que diz respeito à aprendizagem do aluno, os autores ainda trazem que:

> [...] podemos conceber e comparar o percurso da evolução do raciocínio de um aluno com um professor. O primeiro, ao conhecer um assunto pela primeira vez, ainda não apresenta familiaridade suficientemente desenvolvida para lidar com definições formais deste conteúdo. Assim, se apoiará predominantemente num raciocínio intuitivo. Ao decorrer da evolução e no avanço sucessivo de seus estágios mentais de aprendizagem, o estudante, paulatinamente, generaliza, sistematiza e sintetiza as ideias fundamentais envolvidas naquele assunto. Deste modo, o sujeito avança para um raciocínio lógico e matemático [13].

Ou seja, o raciocínio do aluno sobre um novo assunto parte inicialmente da intuição e, com base em suas percepções, este passa a conjecturar ideias, formalizando-as em uma linha de raciocínio que faça sentido para ele. Assim, no que tange à Geometria, os teoremas existentes são afirmações passíveis de uma demonstração, em que sua veracidade (ou não) são garantidas por uma sequência de inferências lógicas, apoiadas na estrutura que dá início ao modelo e em outros teoremas demonstrados anteriormente, sendo a visualização uma base para a compreensão e evolução do pensamento matemático em Geometria.

No que diz respeito aos obstáculos didáticos, ou seja, as dificuldades encontradas pelos docentes no ensino de Geometria, decorrem de diversos fatores, como carência em sua formação inicial e/ou continuada, pouco tempo para preparação de materiais e planejamento de aulas, dificuldades em trabalhar com *softwares* que possibilitam uma aula dinâmica e até mesmo falta de recursos materiais na escola. Para [14] apontam que “Professores que passaram há muitos anos pelos cursos de graduação e que não tiveram cursos de requalificação não se sentem à vontade na aplicação de técnicas modernas de ensino”. Isto acarreta o baixo desempenho nesta área do conhecimento por parte dos alunos, sendo resultado, em alguns casos, do uso de práticas que não correspondem às suas expectativas, ou que estão obsoletas, criando um abismo entre a maneira como professores transmitem e estudantes compreendem a Geometria.

O trabalho de [15] aponta que muitas das dificuldades de compreensão da Geometria Espacial por parte dos estudantes tem origem em lacunas de aprendizagem da Geometria Plana. Ainda, conforme os mesmos autores, “A figura esboçada no papel ou no quadro não corresponde à sua forma original, dificultando o desenvolvimento da imagem mental do objeto e inviabilizando a visualização e apreensão do conhecimento” [15], o que mostra que existe uma necessidade de desenvolver o pensamento geométrico do aluno a partir da percepção visual, para que ele compreenda o mundo que o cerca.

Partindo do exposto, neste trabalho traz-se uma proposta didática visando a possibilidade de evolução do raciocínio geométrico do estudante, desenvolvido a partir da modelagem matemática de questões de geometria plana, viabilizada pelo *software* GeoGebra.

2.3. Modelagem Matemática com o GeoGebra

A Modelagem Matemática é um procedimento que consiste no desenvolvimento de situações-problema, vindos de outras áreas do conhecimento ou cotidiano. Conforme [16] a palavra modelagem está ligada aos “problemas econômicos, biológicos, geográficos, de engenharia e de outros”, cujo objetivo é diminuir um fenômeno em situações idealizadoras de caso real para situações matemáticas [17]. Nesse sentido, a Modelagem em Matemática estrutura-se desenvolvendo uma aproximação de características ligadas ao fenômeno denominado modelo.

Este procedimento foi incorporado ao campo do ensino e aprendizagem como um processo que utiliza o cotidiano nas aulas de matemática, tornando-se uma forma de trabalho sustentada pela comunidade internacional e constando nas reuniões da *International Congress on Mathematical Education* - ICME [18]. Nesta perspectiva, [18] utilizam a nomenclatura Aplicações e Modelagem para desenvolver diversos processos de ligação da vivência do cotidiano com a Matemática, de forma que evidenciam o mais importante, a estruturação do modelo. Dessa forma, há diversos modos de contemplar e efetivar a Modelagem na sala de aula, através de atividades do cotidiano ou situações reais e projetos de longa ou curta duração aos alunos. Essa interpretação pode ser visualizada na Figura 1.

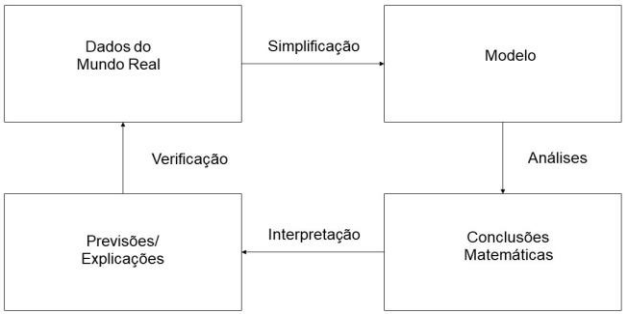


Figura 1. Processo de modelagem no mundo real

Conforme os autores, a Modelagem apresenta uma direção consolidada no processo de demonstrativo de construções matemáticas, ganhando força na resolução de problemas e avaliações de Matemática em provas externas escolares como: Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e o Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica dos Estados Brasileiros. Assim, as concepções de [19], descrevem que a modelagem matemática está incluída “na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”. A modelagem é próxima de uma arte, por ser interpretada pela ação criativa e não pela realização de uma teoria ou método prático.

Dessa forma, a Modelagem Matemática reestrutura-se na prática em sala de aula, mudando o foco do trabalho escolar do docente para o conjunto professor e aluno [20]. O docente, neste caso, possui uma enorme responsabilidade, sendo sua função desenvolver e realizar a conexão entre os pensamentos explorados no desenvolvimento de modelagem e o saber estruturado.

Diante do exposto, nesta pesquisa são exploradas duas situações-problema estruturadas visando a aprendizagem da Geometria, a partir de uma proposta que explora a visualização e o raciocínio geométrico a partir do conteúdo de planificação de sólidos, como forma de idealizar o objeto em duas dimensões.

Concepções geométricas podem ser desenvolvidas a partir das práticas de modelagem, devendo levar em conta o conhecimento geométrico do aluno, a construção de modelos matemáticos desenvolvidos em um software de Geometria Dinâmica e seu consequente aprendizado. Portanto, a geometria é a assimilação do espaço, devendo ser considerado o local que o aluno vive, move e respira. O espaço que o estudante deve conhecer, verificar, explorar, aprender, respirar e movimentar-se melhor [21].

Nesse contexto, os estudantes devem conhecer o espaço real e físico, tal como o vivenciado em nosso cotidiano, incluindo também o espaço das representações geométricas, por exemplo, a janela de visualização de um software geométrico ou uma folha de papel. Então, ao imaginar um objeto em várias dimensões, seja plano e

com suas faces abertas, permite que a instituição da observação seja a essência ideal da geometria de um plano euclidiano [22].

Além da observação, pode-se construir situações-problema com o GeoGebra, software livre de geometria dinâmica desenvolvido por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg em 2001. O programa possui diversos recursos que permitem trabalhar com a geometria e outros conteúdos da Matemática. Nesta observação, percebe-se duas características ligadas ao GeoGebra: a primeira é a disponibilidade da representação semiótica na referida literatura como figura dinâmica [23], em que se realiza uma construção, mediante os comandos iniciais, gerando uma representação da primeira forma geométrica do problema; a segunda característica é a relação semiótica que informa a relação funcional dos objetos geométricos. Relação entre os segmentos e o objeto em três dimensões - dado um segmento possível de enxergar, sem dúvida, para a resolução da questão.

Conforme [24], o entendimento matemático entre os fatos explícitos e implícitos é a gênese cognitiva do significado da oportunidade de uma demonstração. Relação que tem um registro dinâmico com capacidade de provocar nos alunos o raciocínio geométrico na resolução do problema.

Isto posto, no próximo tópico apresenta-se uma análise a priori das questões extraídas da OBMEP, bem como as representações geométricas desenvolvidas pelos autores, como proposta didática para o desenvolvimento do estudante em Geometria.

3. Análise a priori: explorando a visualização geométrica com o GeoGebra

Nesta seção traz-se uma proposta didática com problemas extraídos das provas da OBMEP 2006 e 2011, envolvendo o assunto de planificação de sólidos geométricos. Nessa perspectiva e a partir das análises preliminares do trabalho, definem-se as variáveis didáticas, (macrodidáticas[1] ou microdidáticas[2]) [25] deste estudo, levando em consideração as provas da OBMEP (2006 e 2011) de nível 3 para alunos do Ensino Médio e as questões extraídas que exploram a visualização geométrica dos estudantes e a possibilidade de compreensão a partir da manipulação em diferentes perspectivas dos objetos construídos no software GeoGebra. Caso o retorno positivo na aprendizagem ocorra, é possível que seja uma consequência do raciocínio geométrico estimulado.

Assim, busca-se a partir dos problemas selecionados, envolver o aluno em uma atividade cognitiva que explora a visualização. Deste modo, através de seu raciocínio geométrico, espera-se que ele investigue uma solução satisfatória às questões propostas.

Tendo em vista o desenvolvimento do problema, sugere-se que sejam elaborados alguns acordos didáticos para a sua execução. O contrato didático[3] [26] (pedagógico) deve ser efetuado entre professor e alunos, buscando o bom andamento da proposta didática.

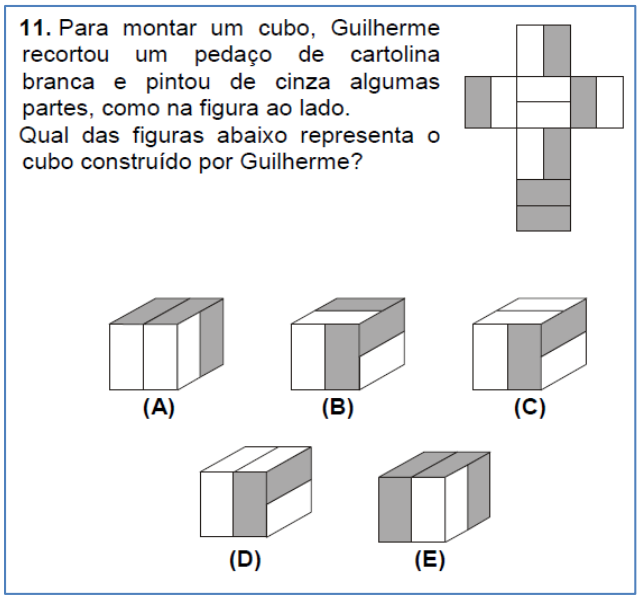
Nessa atividade, apresenta-se uma proposta de tarefa de modelagem matemática a ser construída em sala de aula com suporte do software de Geometria Dinâmica GeoGebra. O intuito é instigar o desenvolvimento da visualização geométrica e ideias que podem surgir para a solução dos problemas a partir da manipulação da construção por meio de sua modelagem. Esta proposta didática apresenta duas questões exploradas nas subseções seguintes.

3.1. Primeira questão da proposta didática

A primeira questão escolhida foi extraída da prova da OBMEP 2006, primeira fase, nível 3, direcionada ao público do ensino médio.

O problema visa, a princípio, o raciocínio geométrico em uma figura dinâmica, que a partir de seus movimentos pode-se visualizar uma solução. Na planificação apresentada no Quadro 1, mostram-se as faces com suas divisões de cores (cinza e branco) e a posição destas cores se altera em decorrência da mudança de posição das faces, entretanto, a figura dinâmica sempre tem o formato de um cubo.

Quadro 1. Primeira questão proposta



Para facilitar a visualização desta figura a partir de sua manipulação, foi incluído um controle deslizante para realizar os movimentos de “abrir” e “fechar” o objeto construído.

Dessa forma, pretende-se explorar a visualização geométrica espacial do estudante nesta questão, a partir da manipulação e da observação das posições encontradas, até que ele encontre uma alternativa correta. A movimentação do objeto em 3D na plataforma online GeoGebra possibilita uma evolução do raciocínio geométrico do estudante, visto que “Os alunos podem desenvolver um expediente de exploração computacional

e desenvolver uma extensa análise numérica dos dados estáticos” [27].

Na Figura 2 apresenta-se a planificação da construção do problema proposto, com as devidas divisões das cores. Verificando as faces ao movimentar a construção no software GeoGebra, existe a possibilidade de uma melhor compreensão do problema por parte do aluno, pois conforme [15], “o software GeoGebra é um recurso de fácil manuseio, dinâmico e interativo, com potencial para auxiliar a visualização e estruturação de percepções geométricas”.

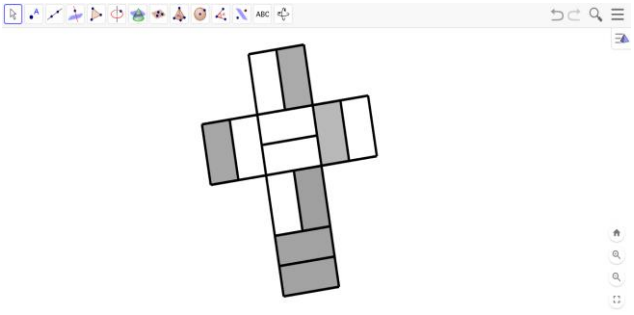


Figura 2. Planificação do cubo do primeiro problema apresentado no GeoGebra

Neste caso, a partir da visualização da Figura 2 com a planificação do cubo, é possível que o aluno perceba que a face totalmente branca e a face totalmente cinza são opostas, inferindo que as alternativas A e B devem ser eliminadas.

Já na Figura 3, busca-se uma exploração do problema a partir de uma perspectiva 3D. Neste momento, o estudante pode visualizar o objeto e as alternativas descritas na situação problema, comparando-as com base em seu raciocínio geométrico em busca da solução correta para o problema.

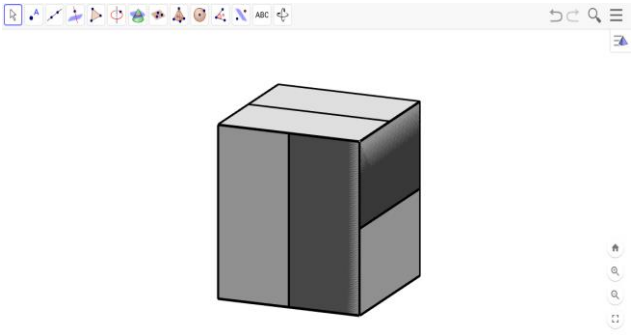


Figura 3. Primeiro problema proposto, visualização em 3D

Utilizando a ferramenta “mover”, pode-se ver a construção por diferentes ângulos. Deste modo, pode-se inferir que os itens D e E devem ser eliminados, pois na montagem deste cubo não pode haver um retângulo branco e outro cinza com lados comuns (figura 4).

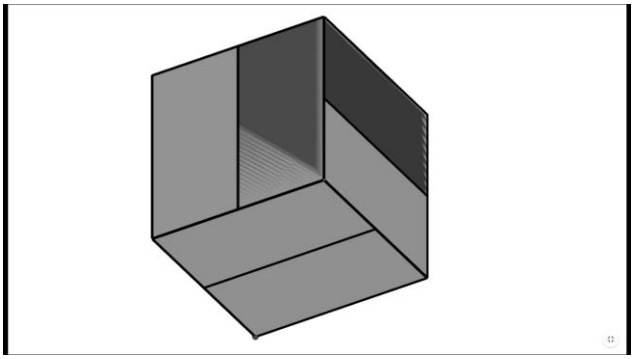


Figura 4. Vista 3D inferior da construção geométrica

Ou seja, ao observar a construção a partir das diferentes perspectivas com o GeoGebra, o aluno pode visualizar/perceber que o formato de fechamento do cubo relativo ao problema mostra a alternativa C como solução correta, como ilustrado na Figura 5:

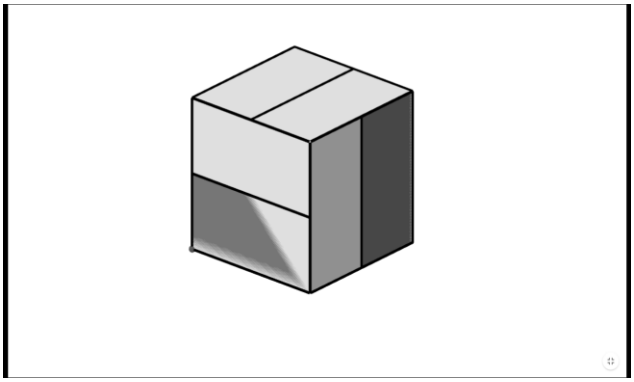


Figura 5. Visualização geométrica do primeiro problema em 3D

Esta construção também está disponível para acesso no *QR-Code* disponibilizado na Figura 6, podendo ser explorada por meio de dispositivo eletrônico - computador, celular ou *tablet*.

Figura 6. Código de acesso ao primeiro problema proposto

Os autores [28] descrevem como o software GeoGebra tem relevância para o trabalho com objetos bidimensionais ou tridimensionais e a diferença entre sua representação geométrica na folha de papel e no computador, enfatizando que o software pode proporcionar aos alunos o desenvolvimento de percepções geométricas a partir da visualização, por meio de suas janelas 2D e 3D.

Nesta primeira questão apresentada, reforça-se a importância da manipulação da construção no GeoGebra como forma de auxiliar o estudante a compreender, a

partir de uma perspectiva visual, qual a solução correta para a situação proposta. Segundo [29], a resolução do problema e a definição de metas para a resposta são as primeiras atitudes a partir da situação de raciocínio geométrico inicial rumo a uma visualização geométrica final. Já para [30] “com origem no modelo computacional, os estudantes se deparam um ampliado cenário de possibilidades de exploração das construções desenvolvidas com o *software* GeoGebra”.

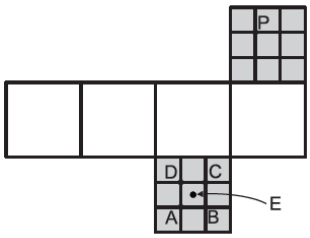
3.2. Segunda questão da proposta didática

A segunda questão proposta também explora as diferentes possibilidades de visualização partindo do raciocínio geométrico, envolvendo também a planificação de um sólido, mas com diferente perspectiva visual. Esta questão foi extraída da prova da OBMEP 2011, também sendo da primeira fase e de nível 3. Do mesmo modo que no primeiro problema, com o aporte do GeoGebra foi desenvolvida uma construção para que o aluno possa, no decorrer da resolução da situação-problema apresentada (Quadro 2), interpretar e construir o pensamento geométrico a partir das informações fornecidas

Quadro 2. Segunda questão proposta

6. Dois pontos na superfície de um cubo são *opostos* se o segmento de reta que os liga passa pelo centro do cubo. Na figura vemos uma planificação de um cubo, na qual as faces destacadas em cinzento foram divididas em nove quadradinhos iguais. Quando o cubo for montado, qual será o ponto oposto ao ponto P?

A) A
B) B
C) C
D) D
E) E



Diante do enunciado da questão (Quadro 2), observa-se que o ponto P é oposto aos outros (A, B, C, D) se o segmento de reta que os liga passa pelo centro do cubo, como enfatizado na questão. Com isso, ao visualizar a Figura 7, almeja-se que o aluno reconheça os lados em cinza e suas divisões, bem como desenvolva o raciocínio e a visualização geométrica, partindo da noção de planificação com pontos e arestas opostas. A Figura 7 representa a primeira parte da construção do objeto construído no GeoGebra.

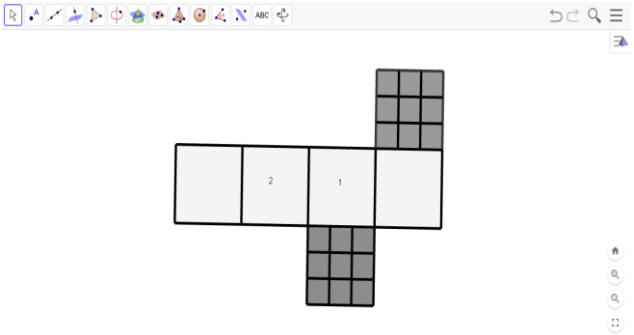


Figura 7. Planificação do objeto da segunda questão proposta

A partir dessa perspectiva visual, o estudante pode desenvolver suas estratégias de resolução, manipulando a figura e conjecturando suas ideias. Diante da construção do problema proposto, o aluno observa a figura e compara com as alternativas da situação problema, conforme apresentado na Figura 8.

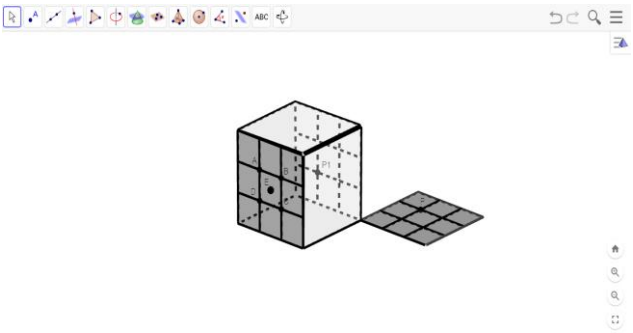


Figura 8. Segunda questão proposta, construção em 3D

Entende-se nesta parte que eles observam, a princípio, que a planificação deste cubo foi numerada em dois lados do cubo (1 e 2). Além disso, o aluno pode observar que, para encontrar o lado oposto ao ponto P, é necessário verificar os pontos A, B, C e D ao formar a figura por completo. Dessa forma, o docente pode recomendar que os estudantes analisem a construção no software GeoGebra em todas as dimensões. Observe as diferentes vistas desta mesma questão nas Figuras 9 e 10.

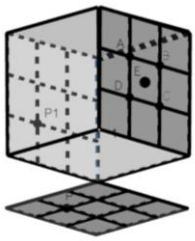


Figura 9. Vista inferior da segunda situação didática em 3D

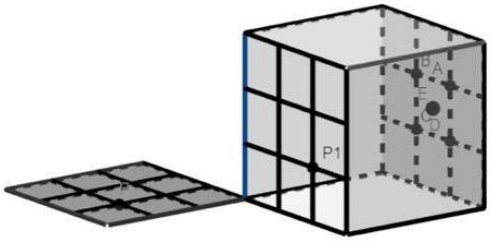


Figura 10. Vista lateral da segunda situação didática em 3D

Com a montagem do cubo, os pontos C e D estão opostos à face 1 da planificação, e igual ao oposto do ponto P a ela. Portanto, os pontos C e D não são opostos ao ponto P. Verifica-se, que a Figura 11 aparece o ponto A ao lado da face 2, logo esse ponto não é oposto de P. A partir da montagem do objeto, o ponto E é oposto ao centro da face, em que P aparece na construção do cubo fechado, restando o ponto B que é o contrário ao ponto P, consolidando a resolução do problema.

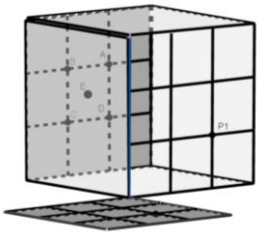


Figura 11. Vista 3D do problema para visualização geométrica

Figura 12. Código de acesso ao segundo problema proposto

Nas questões apresentadas busca-se o desenvolvimento do raciocínio geométrico, sendo este explorado a partir da visualização geométrica adquirida na manipulação e observação das construções no GeoGebra, como forma de modelagem matemática das questões. Segundo [30] a partir das potencialidades do GeoGebra, o professor tem a possibilidade de engajar os estudantes para a compreensão de propriedades numéricas e geométricas, a partir de uma exploração dinâmica.

Vale ressaltar também a possibilidade de construir no GeoGebra outras questões nessa mesma perspectiva, não apenas das provas da OBMEP, mas também de situações diversas, explorando o raciocínio visual geométrico do estudante.

Conclusões

Este trabalho foi elaborado diante do cenário de dificuldades existentes no ensino de Geometria, tanto no ensino quanto na aprendizagem, com vistas a auxiliar o aluno no desenvolvimento do pensamento lógico geométrico, bem como ser um suporte ao professor de Matemática em situações-problema que quadro e pincel não são o suficientes para explicitar de forma clara uma solução.

A proposta deste trabalho foi apresentar a modelagem matemática de duas situações-problema de Geometria, extraídas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), com o intuito de explorar a visualização geométrica com o arrimo do software GeoGebra a partir do conteúdo de planificação de sólidos geométricos, mostrando diferentes maneiras de se trabalhar com materiais de olimpíadas em sala de aula, via recursos tecnológicos.

Nas análises preliminares, a partir dos trabalhos elencados, pode-se perceber que muitas das dificuldades dos estudantes na compreensão da Geometria deve-se à forma como o assunto é abordado em sala de aula, de maneira tradicional, mecanizada e com pouca exploração visual. A visualização em Geometria, a partir de diferentes perspectivas, pode desenvolver o pensamento do estudante para compreender o mundo que o cerca, bem como desenvolver-se em outras áreas do conhecimento.

Nesse sentido, trouxemos neste trabalho o software GeoGebra, como forma de explorar a Geometria a partir de uma perspectiva visual, trabalhando questões que exigem do aluno apenas dedução lógica e raciocínio geométrico, sem necessitar especificamente de cálculos manuais, o que foi proposto na análise a priori, a partir das situações apresentadas.

Como perspectivas futuras para este estudo, pretendemos implementar estas situações didáticas em sala de aula, bem como elaborar outras, para coletar dados e executar as duas últimas fases da Engenharia Didática – experimentação e análise a posteriori e validação – verificando a validade do que foi conjecturado nesta análise a priori em formato de proposta didática.

Espera-se que este trabalho possa contribuir para o ensino de Geometria, como suporte ao professor de matemática no desenvolvimento de seu trabalho docente, bem como para um gradual progresso do aluno, no que diz respeito ao pensamento geométrico a partir da combinação da modelagem matemática, Geometria e GeoGebra.

Agradecimentos

Agradecemos ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq pelo apoio financeiro para a realização desta pesquisa no Brasil.

Notas

[1] Relativas à organização global da engenharia (ARTIGUE, 1990).

[2] Relativas à organização local da engenharia, ou seja, à organização de uma sessão ou de uma fase (ARTIGUE, 1990).

[3] Conjunto de comportamentos do estudante que são aguardados pelo docente e os comportamentos esperados pelo professor que são aguardados pelo aluno (BROUSSEAU, 1982).

Referências

[1] Ministério da Educação do Brasil. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018. Available: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/ [Accessed Jan. 20, 2020].

[2] R. T. Sousa, I. F. Azevedo and F. R. V. Alves, “O GeoGebra 3D no estudo de Projeções Ortogonais amparado pela Teoria das Situações Didáticas,” *Jornal*

Internacional de Estudos em Educação Matemática, vol. 14, no. 1, pp. 92-98, 2021.

[3] M. G. A. Dias, "Modelagem no Ensino da Geometria," in *Proc. VII International Conference on Graphics Engineering for Arts and Design*, Curitiba, 01, 2007, pp. 1-9.

[4] F. R. V. Alves and M. A. Dias "Engenharia Didática para a Teoria do Resíduo: Análises Preliminares, Análise a Priori e Descrição de Situações-Problema," *Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas*, vol. 10, no. 1, pp. 2-14, 2019.

[5] P. V. S. Santiago, "Olimpíada Internacional de Matemática: Situações Didáticas Olímpicas no ensino de Geometria Plana," M. S. Thesis, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, CE, 2021.

[6] I. F. Azevedo, "Situações Didáticas Profissionais (SDP): uma perspectiva de complementaridade entre a Teoria das Situações e a Didática Profissional no contexto das olimpíadas de matemática," M. S. Thesis, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, CE, 2020.

[7] Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, "Regulamento," *Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)*, 2020. [Online]. Available: http://www.obmep.org.br/regulamento.htm [Accessed: Nov. 15, 2020].

[8] W. J. S. Alves, "O Impacto da Olimpíada de Matemática em Alunos da Escola Pública," M. S. Thesis, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2010.

[9] M. Lellis and L. M. Imenes, "A Matemática e o novo Ensino Médio," *Educação Matemática em Revista*, São Paulo, vol. 9, no. 10, 2001.

[10] T. F. O. Settimy and M. A. Bairral, "Dificuldades envolvendo a visualização em Geometria Espacial," *Vidya*, vol. 40, no. 1, pp. 177-195, 2020.

[11] L. C. Pais, "Intuição, experiência e teoria geométrica," *Revista Zetetiké*, vol. 4, no. 2, pp. 65-74, 2009.

[12] E. Fischbein, "The Theory of Figural Concepts," *Educational Studies in Mathematics*, vol. 24, no. 2, pp. 139-162, 1993.

[13] F. R. V. Alves, H. Borges Neto "A contribuição de Efraim Fischbein para a Educação Matemática e a formação do professor," *Revista Conexão, Ciência e Tecnologia*, vol. 5, no. 1, pp. 38-54, 2011.

[14] G. Resende, M. G. B. F. Mesquita, "Principais dificuldades percebidas no processo ensino-aprendizagem de matemática em escolas do município de Divinópolis, MG," *Educação Matemática Pesquisa*, vol. 15, no. 1, pp. 199-222, 2013.

[15] R. T. Sousa, I. F. Azevedo, F. D. S. Lima and F. R. V. Alves "Transposição Didática com aporte do GeoGebra na passagem da Geometria Plana para a Geometria Espacial," *Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação*, vol. 7, no. 5, pp. 106–124, 2021.

[16] J. C. Barbosa, "O que pensam os professores sobre a modelagem matemática," *Revista Zetetiké*, vol. 7, no. 11, pp. 67-85, 1999.

[17] M. Across and A. O. Moscardini, *Learning the Art of Mathematical Modellind*. Chichester, UK: Ellis Horwood, 1985.

[18] W. Blum and M. Niss, "Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and links to other subjects: state, trends and issues in Mathematical Instruction," *Educational Studies in Mathematics*, vol. 22, no. 1, pp. 37-68, 1991.

[19] R. C. Bassanezi, *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo, SP: Contexto, 2002.

[20] D. Burak, "Modelagem matemática: ações e interações no processo de ensino aprendizagem,". M. S. Thesis, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 1992.

[21] H. Freudenthal, *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, SH: D. Reidel Publishing Company, 1973.

[22] R. Sokolowski, *Introdução à fenomenologia*. São Paulo, SP: Edições Loyola, 2004.

[23] C. Laborde and B. Capponi, "Cabri-géomètre constituant d'un Milieu pour l'Apprentissage de la notion de figure," in *Didactique et Intelligence Artificielle*, Balacheff, N. and Vivet, M, Eds. Grenoble, France: La pensée Sauvage, 1994, pp. 165-210.

[24] M. A. Gravina, "Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético dedutivo," M. S. Thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, RS, 2001.

[25] M. Artigue, M. "Ingénierie didactique," *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 9, no. 3, pp. 281-307, 1990.

[26] G. Brousseau, "Ingéniere didactique. D'un problème à l'étude à priori d'une situation didactique," in Deuxième École d'Été de Didactique des mathématiques, Olivet, 1982.

[27] F. R. V. Alves, "Visualizing the Olympic Didactical Situation. (ODS): Teaching Mathematics with support of GeoGebra software," *Acta Didactica Napocencia*, vol. 12, no. 2, pp. 97-116, 2019.

[28] P. V. S. Santiago, F. R. V. Alves, "Teoría de situaciones didácticas en la enseñanza de la geometría plana: el caso de la Olimpiada Internacional de Matemáticas y la ayuda del software GeoGebra," *Unión-Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, vol. 17, no. 61, pp. 1-17, 2021.

[29] L. M. W. Almeida and E. C. Ferruzzi, "Uma aproximação socioepistemológica para a modelagem

matemática,” *Revista Alexandria*, vol. 2, no. 2, pp. 117-134, 2009.

[30] F. R. V. Alves, “Situações didáticas olímpicas (SDOs): ensino de olimpíadas de matemática com arrimo no software GeoGebra como recurso na visualização,” *Revista Alexandria*, vol. 13, no. 1, pp. 319-349, 2020.

Informação de contato dos autores:

Renata Teófilo de Sousa
Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE)
Fortaleza
Brasil
rtsnaty@gmail.com
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-5507-2691

Paulo Vítor da Silva Santiago
Universidade Federal do Ceará (UFC)
Fortaleza
Brasil
pvitor60@hotmail.com
ORCID iD: http://orcid.org/0000-0002-6608-5452

Francisco Régis Vieira Alves
Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE)
Fortaleza
Brasil
fregis@gmx.fr
https://ifce.academia.edu/RegisFrancisco/Journal-Articles
ORCID iD: http://orcid.org/0000-0003-3710-1561

Renata Teófilo de Sousa
Mestranda em Ensino de Ciências e Matemática pelo IFCE. Especialista em Ensino de Matemática (UVA), Qualificação em Ensino de Matemática no Estado do Ceará (UFC) e Didática e Metodologias Ativas na aprendizagem (UniAmérica).

Paulo Vítor da Silva Santiago
Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Federal do Ceará. Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará. Especialista em Ensino de Matemática - ISIEB.

Francisco Régis Vieira Alves
Doutor em Educação pela Universidade Federal do Ceará, Bolsista de produtividade do CNPQ – PQ2. Professor permanente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do IFCE. Coordenador do Doutorado em rede RENOEN, polo IFCE.