Artículos originales

Engenharia Didática (ED): O uso de Situações Didáticas Olímpicas para o ensino do Teorema da base média do triângulo a partir de problemas da OBMEP

Didactic Engineering (DE): The use of Olympic Didactic Situations for teaching the Middle Base of the Triangle Theorem from OBMEP Problems

José Gleison Alves da Silva[1], Renata Passos Machado Vieira[2], Francisco Régis Vieira Alves[3], Daniel Brandão Menezes[4]

[1] Secretaria de Educação de Sobral – SEDUC, Sobral, Brasil
[2] Secretaria de Educação do Ceará – SEDUC, Fortaleza, Brasil
[3] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE, Fortaleza, Brasil
[4] Universidade Estadual Vale do Acaraú - UVA, Fortaleza, Brasil

gleison.profmat.seduc@gmail.com, profrenatapassos@gmail.com, fregis@ifce.edu.br, brandaomenezes@hotmail.com

Recibido: 15/10/2020 | **Corregido:** 20/06/2021 | **Aceptado**: 11/08/2021

Cita sugerida: J. G. Alves da Silva, R. P. Machado Vieira, F. Régis V. Alves, D. B. Menezes, "Engenharia Didática (ED): O uso de Situações Didáticas Olímpicas para o ensino do Teorema da base média do triângulo a partir de problemas da OBMEP," *Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*, no. 31, pp. 88-100, 2022. doi: 10.24215/18509959.31.e9

Resumo

Este artigo é um recorte de dissertação de mestrado a qual apresenta uma proposta de ensino referente ao uso dos problemas (Problemas Olímpicos) contidos nas questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), para auxílio de professores em formação inicial em Matemática e ensino de Matemática. Desse modo, o objetivo deste artigo é apresentar uma proposta de ensino do teorema da base média do triângulo a partir de um problema da OBMEP, com amparo no software GeoGebra, sob a perspectiva da Teoria das Situações Didáticas (TSD) para o ensino do teorema da base média do triângulo. A situação-problema foi discutida com base nas Situações Didáticas Olímpicas da OBMEP, estruturada e fundamentada nas fases da Teoria das Situações Didáticas, com o auxílio do software GeoGebra. A pesquisa foi modelada conforme a metodologia de pesquisa da Engenharia Didática. Os resultados foram categorizados baseado nas etapas de ação, formulação, validação e institucionalização da TSD. Observou-se que a utilização que o PO aplicado fez emergir todas as etapas da TSD fazendo o aluno agir, formular e validar as estratégias apresentadas, o que contribuiu na construção do aprendizado. Portanto, os resultados obtidos foram positivos na visão dos professores em formação pela forma como foram planejadas as situações didáticas e pela utilização do GeoGebra na construção e no apoio aos estudantes nos processos de ensino e aprendizagem de Matemática.

Palavras-chave: Base média; Engenharia didática; Teoria das situações didáticas; OBMEP; Triângulo; Situação didática olímpica.

Abstract

This article is an excerpt from a master's dissertation in which it presents a teaching proposal regarding the use of problems (Olympic Problems) contained in the questions of the Brazilian Public School Mathematics Olympiad (OBMEP), to help teachers in initial training in Mathematics and Teaching of Mathematics. Thus, the aim of this article is to present a proposal for teaching the average base of the triangle theorem from an OBMEP problem, supported by the GeoGebra software, from the perspective of the Theory of Didactic Situations (TSD) for the teaching of the theorem from the middle base of the triangle. The problem-situation was discussed based on the OBMEP's Olympic Didactic Situations, structured and grounded in the phases of the Didactic Situation Theory, with the help of the GeoGebra software. The research was modeled according to the Didactic Engineering research methodology. The results were categorized based on the TSD Action, Formulation, Validation and Institutionalization steps. We observed that the use that the PO applied made emerge all the stages of the TSD making the student act, formulate and validate the presented strategies, which contributed to the construction of learning. Therefore, the results obtained were positive in the view of the teachers in training, due to the way in which teaching situations were planned and the use of GeoGebra in the construction and support of students in the teaching and learning processes of Mathematics.

Keywords: Average base; Didactic engineering; Theory of didactic situations; OBMEP; Triangle; Olympic didactic situation.

1. Introdução

De fato, o estudo da matemática não é considerado fácil por muitos estudantes, sendo necessário que sejam oportunizadas diferentes maneiras que levem ao estímulo o raciocínio dos estudantes. Com isso, percebe-se a necessidade de o docente elaborar elementos e situações de ensino capazes de orientar as ações desses aprendizes [1]. Muitos são os relatos de estudantes, informando que as aulas são monótonas e desmotivadoras, não havendo nenhum atrativo que desperte interesse. Segundo Pontes [2]:

> *"As propostas educacionais estão efetivamente ultrapassadas e não conseguem atrair nenhum interesse do educando pelos conteúdos propostos, devido a não haver nenhuma relação com atividades que correspondam às necessidades dos aprendizes" (p. 16).*

Indubitavelmente, o número de pesquisas no âmbito da educação matemática vem aumentando gradativamente, com o viés de compreender esse processo de ensino e aprendizagem dos estudantes, em relação à área da Matemática [3]. A partir disso, desenvolveram-se teorias e metodologias, enfatizando diferentes componentes existentes nesse processo, evidenciando as pesquisas francesas em Didática da Matemática. Assim, destaca-se utilização da ED [4] como metodologia de pesquisa neste trabalho, possuindo uma considerável importância no campo de pesquisa educacional na área da Matemática, correlacionando-a com a teoria de ensino, TSD [5].

A partir da contextualização, buscou-se utilizar neste artigo problemas de olimpíadas de Matemática, em específico a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)[1]. A OBMEP anualmente vem crescendo significativamente abrangendo quase todos os municípios do Brasil. Essa amplitude proporciona uma maior participação de estudantes do ensino básico em competições, o que estimula o interesse e a interação com a disciplina de Matemática, por intermédio das suas questões desafiadoras.

Como conteúdo, foi escolhido o teorema da base média do triângulo, pois, a partir da experiência como professor de Matemática em preparações para a OBMEP, percebeu-se a frequência de questões que abordam o conteúdo.

A apresentação do teorema da base média acontece por intermédio de aplicação em exercícios pouco criativos e que exigem pouco dinamismo [6; 7; 8]. Os livros didáticos aprovados pelo PNLD[2] 2018, quando direcionam para o ensino de geometria plana, abordam o assunto de maneira resumida ou quase insuficiente para um aprendizado significativo.

Diante disso, observou-se a necessidade da construção desse estudo, possibilitando aos professores e estudantes o conhecimento e aplicação desse teorema, com o uso de *softwares* (o GeoGebra), diversificando do modelo tradicional de ensino e uso de Situações Didáticas Olímpicas – SDO, metodologia de ensino baseada na Teoria das Situações Didáticas – TSD. Segundo Neto [9],

> *"[...] a SDO surge, no meio olímpico, como uma nova proposta metodológica de ensino alicerçada nas fases dialéticas da TSD de Guy Brousseau e constitui uma nova roupagem aos problemas de olimpíadas" (p. 21).*

As SDOs comportam a relação entre Teoria das Situações Didáticas e Problemas Olímpicos – PO (SDO = TSD + PO), no qual esse último, é definido por Alves [10] como problemas de olimpíadas de Matemática "restrito" a alunos competidores, ou seja, questões que exigem argumentos matemáticos eficientes, raciocínio e conhecimento de conteúdos a nível universitário.

Portanto, neste trabalho apresenta-se uma proposta a partir de um problema da OBMEP, com amparo do *software* GeoGebra sob a perspectiva da Teoria das Situações Didáticas (TSD) para o ensino do teorema da base média do triângulo. Ressalta-se que essa ferramenta tecnológica selecionada permitirá aos estudantes a construção, dinamização e visualização das figuras apresentadas na questão.

Assim, foi utilizada a metodologia de pesquisa da Engenharia Didática (ED), com o propósito de conhecer o objeto de estudo e nos dando suporte para a concepção das sequências didáticas de ensino. Os dados foram analisados com base na ED, confrontando análises preliminares e análises a *posteriori* características dessa metodologia, onde essa análise acontece internamente [11].

Nas seções seguintes, foi apresentada a fundamentação teórica desenvolvida e, em seguida, a metodologia realizada. Por fim, foram apresentados os resultados coletados e a conclusão.

2. Fundamentação Teórica

2.1. Engenharia Didática

Originalmente, a ED surgiu no início dos anos 80, a partir de discussões no Instituto de Investigação do Ensino de Matemática, objetivando aprimorar os docentes da área de matemática, além de produzir elementos como aporte às aulas em sala. Porém, posteriormente, apresentou o viés de analisar os projetos de sequências didáticas de ensino no âmbito da Matemática [12]. Assim sendo, tem-se então que na ED existe uma observação das experiências coletadas no ambiente de sala de aula, comparando os resultados esperados com os obtidos. Esse fato ocorre a partir de confrontos realizados entre a análise preliminar com a análise a *posteriori* das situações didáticas, validando essa metodologia [13].

O seu *design* traz para a educação matemática, uma maneira de analisar, investigar e discutir sobre conteúdos matemáticos, segundo a definição de um determinado objeto de estudo. Alves e Dias [3] relatam que a ED é estruturada da seguinte forma:

> "*Engenharia Didática clássica ou de 1ª geração (ED1), compreendida como uma metodologia que visa o estudo dos fenômenos didáticos, que possam permitir os fenômenos em sala de aula, bem como, uma perspectiva de ED, visando ao desenvolvimento de recursos de formação que, segundo a tradição, tem recebido a denominação de Engenharia Didática de 2ª geração (ED2)"* (p. 197).

A ED, segundo Laborde [14], não compara o comportamento dos estudantes e eventos ocorridos em sala de aula durante a experimentação. Consiste, na verdade, em analisar e confrontar os modelos do objeto de estudo, discutidos na fase da análise a *priori* e na fase da análise a *posteriori*. Contudo, tem-se que a ED é dividida em quatro fases, sendo elas: análise preliminar, concepção e análise a *priori*, experimentação e análise a *posteriori* e validação.

Nas análises preliminares, são identificados os problemas referentes ao ensino e aprendizagem de Matemática e assim feito um levantamento do referencial teórico em torno do objeto de estudo, realizando uma análise epistemológica, cognitiva e didática [15].

Na concepção de análise a *posteriori*, a noção da experimentação do ensino e da metodologia oferece aporte para os pesquisadores projetarem o comportamento dos estudantes, durante a fase seguinte. São ainda selecionadas as variáveis didáticas, podendo ser micro-didáticas ou macro-didáticas. As micro-didáticas identificam as condições que serão cumpridas pelas situações de ensino correspondente, ou seja, estabelecem uma situação didática para cada condição fornecida. As macro-didáticas analisam as restrições epistemológicas, cognitivas e didáticas que auxiliam no processo de ensino [16]. Nessa fase, é então utilizada uma teoria de ensino, baseada na TSD, visando facilitar a elaboração do plano de ação, consistindo no planejamento da aula. Assim, no contexto desta pesquisa, foram selecionadas duas questões da OBMEP que abordam o conteúdo do teorema da base média do triângulo.

Na fase da experimentação, terceira fase, os dados são levados para o campo, realizando registros fotográficos, filmagens, gravações de áudio e entre outros recursos [12]. É necessário que haja um contrato didático ressaltando as responsabilidades dos professores e estudantes, salientando que nem sempre este é concretizado, podendo haver uma ruptura.

Por fim, na última fase, análise a *posteriori* e validação, os dados coletados na fase anterior são analisados e comparados com a segunda fase, análise a *priori*, validando assim a ED [17]. O processo de validação pode ser dado de forma interna ou externa, em que o primeiro confronta os dados somente com os estudantes que utilizaram da ED. Já na externa, são analisados e discutidos os experimentos de turmas que aplicaram a ED e de turmas as quais utilizaram outra metodologia de pesquisa [14].

Mediante a fase das análises preliminares, são selecionados os problemas referentes ao teorema da base média do triângulo, recorrendo à tecnologia, com o *software* GeoGebra, e discutindo as possíveis resoluções dos estudantes, fundamentada nas fases da TSD.

2.2. Teoria das Situações Didáticas

Com base nos problemas selecionados na etapa de análises preliminares, foi necessário o apoio de uma teoria de ensino que estruturasse sequências didáticas as quais proporcionassem aos estudantes um ambiente de interação e aprendizado por intermédio dos problemas de olimpíadas, nesse caso, utilizou-se a TSD.

A TSD consiste em interações entre o estudante e o professor, estabelecendo relações entre os conhecimentos e saberes matemáticos em jogo. Logo, os estudantes são estimulados a resolver as situações didáticas de ensino propostas, promovendo o lado intuitivo, investigativo e cognitivo no processo de ensino e aprendizagem em matemática [18]. Uma "situação" é definida por Brousseau [19] como "*o modelo de interação de um sujeito com um meio específico que determina certo conhecimento*" (p. 19). Já as "situações didáticas de ensino" representam uma estrutura composta de atividades propostas pelo professor para os estudantes. Brousseau [19], afirma que:

> *"A teoria das situações didáticas coloca que o papel dos professores é suscitar a aparição dos conhecimentos e dos saberes nos alunos por uma gênese, artificial, mas transposta, da atividade da comunidade matemática"* (p. 279).

Logo, pode-se então compreender que a TSD é uma teoria com o viés de caracterizar o processo de aprendizagem, através de situações didáticas de ensino, fornecendo pontos para que haja a evolução dos estudantes. Contudo, tem-se ainda a presença do *milieu*, sendo, portanto, o meio o qual a situação didática é aplicada. Assim, os estudantes, o professor e o *milieu*, possuem funções importantes durante o processo de ensino e aprendizagem. Essa teoria de ensino é então dividida em quatro situações de ensino, a saber: ação, formulação, validação e institucionalização.

Na fase da ação, o estudante irá formular as estratégias de resoluções, tentando ensinar a si mesmo uma maneira de resolver a atividade proposta [20]. No caso desta pesquisa, trata-se de criar métodos para resolver a SDO proposta, uma vez que quase todas as situações de ensino são particulares de cada pesquisa.

Na fase da formulação, atribui-se uma linguagem mais formal perante a resolução obtida na fase anterior, permitindo o entendimento de todos os participantes [21]. No contexto deste trabalho, nessa fase, são apresentadas as construções das SDOs no *software* GeoGebra.

Para ocorrer uma construção matemática, é necessário que o conhecimento seja formulado, formalizado e validado. Assim, espera-se que, na fase da validação, sejam demonstradas as afirmações e resoluções oriundas na fase da ação [22]. Almeja-se que sejam realizadas discussões, podendo haver modificações do modelo matemático analisado.

Por fim, na fase da institucionalização, o professor formaliza as resoluções dos estudantes, revelando a intenção da situação-problema proposta [23].

Portanto, a partir dessa teoria, perspectiva-se uma abordagem para o contexto de olimpíadas de Matemática com o propósito de direcionar para um ensino mais dinâmico e que proporcione aos participantes um aprendizado significativo por meio de um ambiente bem planejado, desse modo, na fase seguinte, falou-se sobre as SDOs.

2.2.1. Sobre as Situações Didáticas Olímpicas (SDO)

Os problemas abordados na OBMEP são desafiadores, instigantes e apresentam diversos conceitos e caminhos, exigindo também bastante criatividade em suas resoluções, tanto dos professores como dos discentes. No entanto, geralmente são utilizados apenas nas preparações para essas competições e com alunos competidores, ou seja, aqueles que apresentam um melhor desempenho em Matemática e estão frequentemente participando dessas competições [10].

Os problemas abordados na OBMEP são desafiadores e instigantes, apresentando diversos conceitos e caminhos, exigindo também bastante criatividade em suas resoluções, tanto dos professores como dos discentes. Esses problemas, definidos por Santos e Alves [24] como Problemas Olímpicos (PO), representam um conjunto de situações de problemas de Matemática, abordados num contexto competitivo ou de maratonas, com a participação apenas (e de modo restritivo) dos estudantes competidores. Esse direcionamento dos PO exclui uma quantidade de estudantes que apresentam dificuldades na área impedindo o contato com os problemas de olimpíadas.

À vista disso e de uma possibilidade de adequar ou adaptar esses problemas, junto ao uso da tecnologia, utilizou-se as sequências didáticas, sob a perspectiva da TSD, o que se denomina por SDO. A definição de SDO é apresentada por Santos e Alves [24], como sendo:

> "*um conjunto de aplicações estabelecidas implicitamente ou explicitamente, entre um aluno ou grupo de aluno, um certo meio (compreendendo ainda o conhecimento matemático abordado por intermédio de problemas de competição e olimpíadas) e um sistema educativo, com o objetivo de permitir a apropriação, por parte destes alunos de um conhecimento constituído ou em vias de constituição, oriundo de um ambiente de competição e problemas ou um conjunto de problemas característicos de olímpiadas*" (p. 285).

Sendo assim, a SDO ou, resumidamente, Situação Olímpica [25], pode ser compreendida a partir da equação característica: SDO = TSD + PO, ou seja, a aplicação de um problema extraído da olimpíada de Matemática, nesse caso a OBMEP, sistematizada sobre a TSD [10].

A SDO permite essa inserção em sala de aula, abrangendo todos os alunos e explorando conceitos a partir de PO de uma forma que não seja exclusivo para alunos competidores, ou seja, aqueles que sempre se destacam nessas competições. Assim, Azevedo, Alves e Oliveira [1]:

> "*Entende que SDO pode ser considerada uma proposta de uma sequência didática capaz de estabelecer relações de ensino-aprendizagem em matemática a partir de situações de ensino, com base na convivência com problemas que possuem características de olimpíadas, ou seja, problemas encontrados em provas de competição*" (p. 87).

Com base, nos aspectos teóricos e metodológicos anteriormente explanados, na etapa seguinte será abordado o percurso metodológico realizado.

3. Metodologia

O percurso metodológico realizado no trabalho completo que se consubstanciou pelas etapas da ED: análises preliminares, análise a *priori* e concepção da situação didática, experimentação e análise a *posteriori* e validação, no entanto, serão abordados apenas alguns resultados para exposição.

Na etapa de Análises preliminares, realizou-se um estudo com base em três aspectos: I) uma breve abordagem epistemológica sobre o ensino de geometria; II) análises dos livros didáticos do ensino médio do Brasil sobre o conteúdo de geometria plana e; III) material disponível na internet e banco de questões da OBMEP para selecionar a questão sobre geometria a ser abordada na pesquisa.

Relacionado ao aspecto I, o embasamento foi em autores como [26], [27] e [28] quando retratam sobre o abandono do ensino de geometria em décadas anteriores dando prioridade ao estudo da álgebra e à teoria dos conjuntos, como também a sua abordagem nos livros didáticos, conteúdo este localizado sempre nos últimos capítulos e que, em certos momentos, devido à extensa quantidade de conteúdos no currículo anual por série e o pouco tempo necessário para cada conteúdo, a geometria era exposta de forma insuficiente ou não abordada durante o ano letivo, que é somado à insegurança que os professores tinham em relação ao conteúdo de geometria pela pouca exploração nos cursos de licenciatura e a formação insuficiente na área.

Em relação ao aspecto II, observou-se, em todos os livros aprovados no Programa Nacional do Livro Didático – PNLD 2018, que o conteúdo de geometria é trazido, em sua maioria, nos últimos capítulos. Dos 8 (oito) livros analisados, apenas [29] expõe nos capítulos iniciais. Também foi observada a maneira com que os conteúdos são explanados aos estudantes, seguindo padrões tradicionais de ensino que estimulam a mecanização do pensamento e a aprendizagem por repetição. Esses padrões são descritos, de acordo com [30], sempre pela “explicação dos conteúdos, seguidos de exemplos e, por fim, atividades relacionadas ao conteúdo”.

Em relação ao aspecto III, procurou-se nas provas da OBMEP questões referentes ao conteúdo de geometria euclidiana plana. As questões escolhidas também são suscetíveis ao uso do GeoGebra, que dará suporte aos estudantes e ao docente para adaptação do problema.

Na Análise a *priori* e Concepção da situação didática, foi elaborado e planejado um conjunto de situações didáticas, a partir de PO retirados das provas da OBMEP que abordam conceitos de geometria. As situações didáticas seguem os pressupostos da TSD, além disso, todas essas questões foram construídas com o auxílio do *software* GeoGebra, que também foi utilizado como objeto para a construção e modificação do comportamento dos professores em formação inicial durante a resolução dos problemas.

Na etapa de Experimentação, que foi aplicada com um grupo de estudos composto por licenciandos do curso de Matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA, localizada na cidade de Sobral – CE, e que participam do Programa de Iniciação Científica – PIC[3] como professores orientadores. Cada aula teve duração de 90 minutos, as coletas de dados foram registradas por áudios, registros fotográficos, cálculos realizados pelos discentes, além das observações obtidas, sendo que as aulas foram realizadas pela plataforma Google *Meet* e os dados analisados com base nas categorias que representam a TSD.

Na análise a *posteriori* e validação (interna), foram realizadas as análises dos dados, confrontando-os com a Análise a *priori* como propósito de atingir os objetivos e hipóteses elencados neste trabalho, além disso verificar a adequabilidade dos Problemas Olímpicos resolvidos por eles e suas análises quanto à utilização em sala de aula.

4. Resultados e discussões

Os resultados foram obtidos por intermédio de imagens, áudios, escritos dos alunos e *printscreen* da tela do computador. Além destes, utilizou-se os aplicativos *WhatsApp*, para a transferência das construções aos estudantes, e a plataforma Google *Meet*, utilizada na aplicação devido à pandemia do Covid-19.

A aplicação aconteceu com 6 estudantes do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA, localizada na cidade de Sobral – Ceará – Brasil. O critério de escolha desses estudantes foi por fazer parte do Programa de Iniciação Científica – PIC Jr, programa que dá assistência e realiza aulas para alunos medalhistas da OBMEP que pretendem se aprofundar na área da Matemática. Os estudantes foram identificados na pesquisa de L2 a L7, como forma de preservar suas identidades.

O PO proposto foi retirado da prova da OBMEP, realizada no ano de 2018 para alunos do ensino médio (nível 3/1° fase) referente ao conteúdo de geometria. Esse problema deve dar ênfase ao teorema da base média do triângulo, além de outros conceitos que podem se apresentar como conhecimentos prévios dos estudantes, como: semelhanças de triângulos, condição de existência de um triângulo.

PO1 - Em um quadrilátero, os lados e não são paralelos, e suas medidas são iguais a e, respectivamente. Dentre as opções abaixo, qual é a única que pode representar a medida do segmento que une os pontos médios dos lados e

A) 4,5 cm B) 5,0 cm C) 6,5 cm
D) 7,0 cm E) 7,5 cm

Logo a seguir, a partir do enunciado, cria-se uma construção no GeoGebra para dar suporte aos estudantes que realizarão a resolução do problema. Em sequência, apresenta-se a construção pelo *sofware* GeoGebra para computadores (ver Figura 1), e o *QR code* (ver Figura 2) que dará acesso pelo aplicativo do GeoGebra para celular (ver Figura 3).

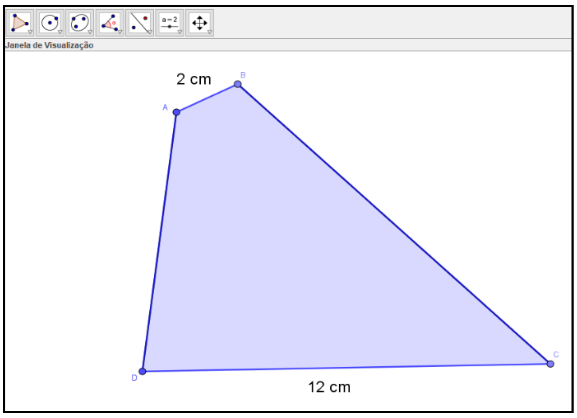

Figura 1. Construção no software GeoGebra para computadores

Figura 2. QR code que permite acesso à construção pelo celular

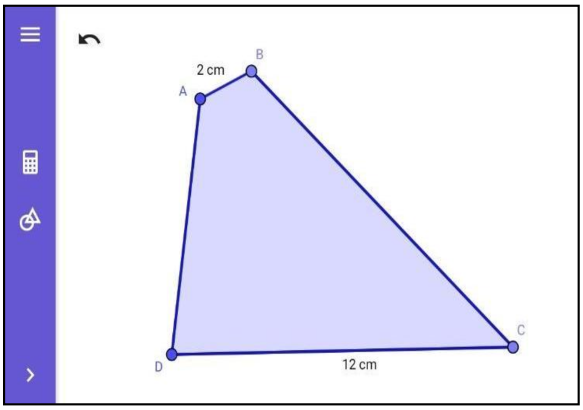

Figura 3. Construção adaptada para o *software* GeoGebra para celulares

Dando início à aplicação da sequência didática, o docente disponibilizou o PO pelo aplicativo de mensagens *WhatsApp*, para que os estudantes tivessem o suporte na visualização da figura construída no GeoGebra. Pode-se observar o contato inicial dos participantes com o enunciado e as informações contidas nele, para que possam iniciar suas tentativas (ver Figura 4).

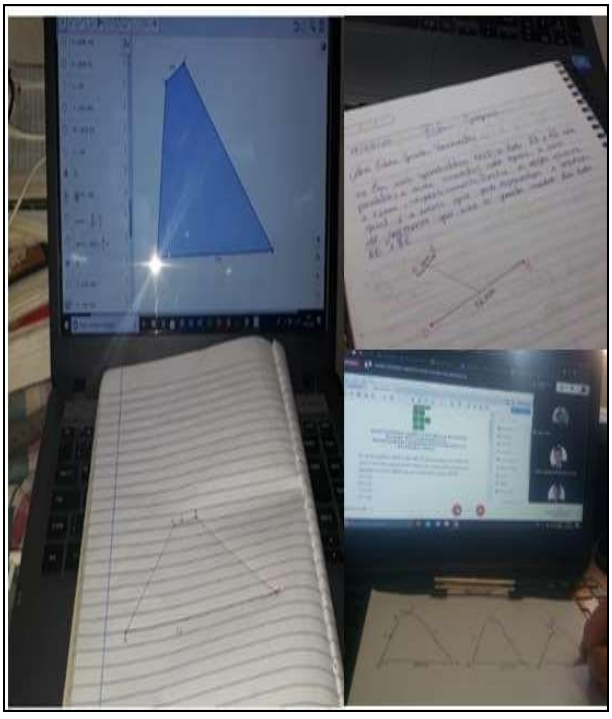

Figura 4. Primeiro contato com o PO por intermédio do enunciado e a visualização no GeoGebra

A partir do contato, os licenciandos iniciaram as ações sobre o meio tirando informações relevantes como intuito de construir suas estratégias. Diante disso, o pesquisador realizou alguns questionamentos, por exemplo "quais as informações mais relevantes vocês conseguiram extrair do problema?", ao grupo como propósito de saber quais são as tentativas iniciais em relação ao PO. Com isso, o sujeito L5 apresentou o seguinte raciocínio ao grupo:

> *"L5: Eu pensei da seguinte maneira, além do desenho dado, fazer outros desenhos com possibilidades para essa figura, porque o que ele dá na figura não é exatamente aquela que está desenhado no GeoGebra. Então, eu fiz uma figura com os dois segmentos quase paralelos ou quase perpendiculares, meio que um trapézio com a parte de dois centímetros, meio que para fora dos doze centímetros, aí eu estou vendo algumas possibilidades".*

O professor continuou questionando os outros participantes em relação às informações relevantes retiradas após a leitura do enunciado do PO. L7, L6, L2 responderam da seguinte maneira:

> *"L7: Professor, eu estava tentando pegar os pontos médios dados na figura e construir duas figuras semelhantes e utilizar a proporção para ver se consigo retirar algum dado relevante".*

> *"L6: Eu construí outra figura e estou tentando encontrar como que cálculo a base média".*

> *"L2: Eu iniciei tentando construir alguma coisa dentro da figura mesmo, colocar alguma diagonal, mas não estou conseguindo ver".*

Observou-se que cada estudante sugeriu uma proposta condizente com os dados obtidos da questão, o que consubstancia a etapa inicial da TSD, a ação. Esses dados obtidos perpassam pela construção da ideia intuitiva de cada licenciando, o que os levam à escolha de um caminho que possa dar prosseguimento durante a resolução.

A partir das sugestões, iniciou-se uma discussão entre os licenciandos correspondente ao raciocínio de L2, o que indica a etapa de formulação, que, segundo Brousseau [22], "é uma situação que coloca pelo menos dois atores em contato com um meio", e nessa situação utilizou-se a estratégia relacionada a incluir uma diagonal com extremos no ponto $\overline{AC}$, dividindo o quadrilátero $ABCD$ em dois triângulos ΔACB e ΔADC (ver Figura 5). Desse modo, segue a discussão a seguir:

> *L2: "Eu não sei se meu pensamento está correto, mas como está falando de ponto médio, não que tenha sido bem no meio, mas tentei redesenhar a figura e passei uma reta como se fosse do ponto A até o ponto C (ver Figura 5, SETA VERMELHA), isso me favoreceu criar um triângulo no meio. E esse triângulo eu chamei de ΔMPN (ver Figura 5, SETA AZUL), com isso, eu tentei utilizar como se fosse dividindo por dois, porque é no meio, esse*

segmento que é o ponto $\overline{AB}$ que são 2 cm, dividindo por dois acabei encontrando o segmento $\overline{PN}$ que é 1 cm (ver Figura 5, SETA AMARELA)"

L2: "Só uma dúvida em relação ao pensamento da L6, qual a parte que ela encontrou de 1 cm?"

L6: "Vou explicar novamente, eu redesenhei a figura, aí o ponto médio não está localizado no centro da figura? Eu desenhei uma reta que vai do ponto A até o C, não sei se você conseguiu entender?"

L2: "Aí no caso ficaria o triângulo ΔACB e outro triângulo ΔADC. A partir disso, podemos utilizar a base média!"

Utilizou-se a setas em cores diferentes para representar cada ação realizada pelos sujeitos com propósito de identificar o leitor na discussão. Sendo assim, intuitivamente, o licenciando L2 relacionou o conceito da base média do triângulo com a metade do segmento AB e CD, o que não estava errado, mas precisaria mostrar ao grupo como se chegou a essa conclusão (ver Figura 5).

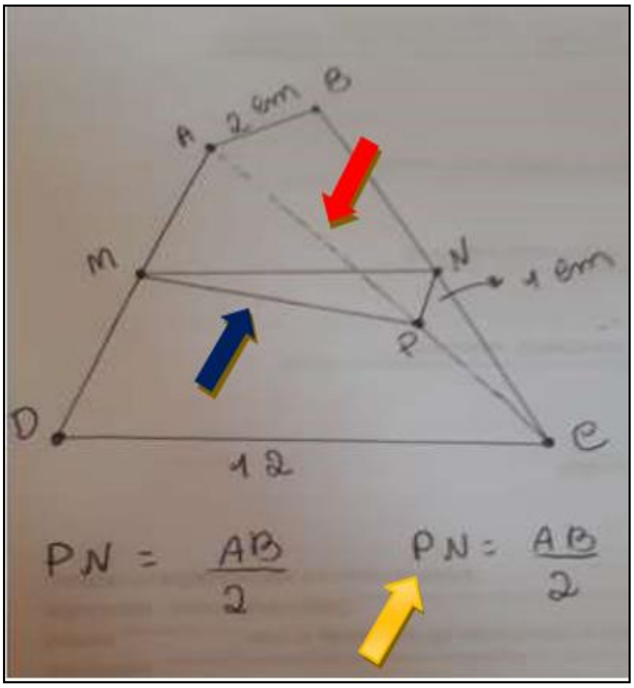

Figura 5. Estratégia utilizada pelo licenciando L2

A discussão de ambos os licenciandos foi baseada na Figura 4, partindo da construção da diagonal $\overline{AC}$ que dividiu a figura em dois triângulos. Com isso, L6 construiu um triângulo ΔMPN, no qual esses três pontos representavam os pontos médios dos segmentos $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. De modo intuitivo, o licenciando L6 sugeriu a medida do segmento $\overline{PN}$ igual 1 cm encontrado por intermédio da divisão do segmento $\overline{AB}$ por 2. A discussão baseada na Figura 5 continuou a seguir:

L2: "No caso, esse M é como se fosse o ponto médio de $\overline{AD}$?"

L6: "Assim, eu ainda estou tentando formular alguns pensamentos, mas o intuito de colocar esse ponto médio M era para encontrar o ponto médio da figura! Esse 1 cm é a distância entre P e N".

L2: "Por que se esse M fosse o ponto médio de $\overline{AD}$ daria para encontrar a medida de $\overline{MP}$?

L6: Esse seria o meu próximo passo, eu ia realizar o mesmo pensamento utilizado para encontrar a medida de $\overline{PN}$. Esse tamanho $\overline{PM}$ ou $\overline{MN}$ eu ia tentar pela mesma maneira, por exemplo a distância de $\overline{PM}$ eu ia dividir por dois, por ser a metade de $\overline{DC} = 12$ e ia encontrar o valor de $\overline{MP} = 6$. Agora falta só formular o que tenho para encontrar o resultado final de $\overline{MN}$". (ver Figura 6)

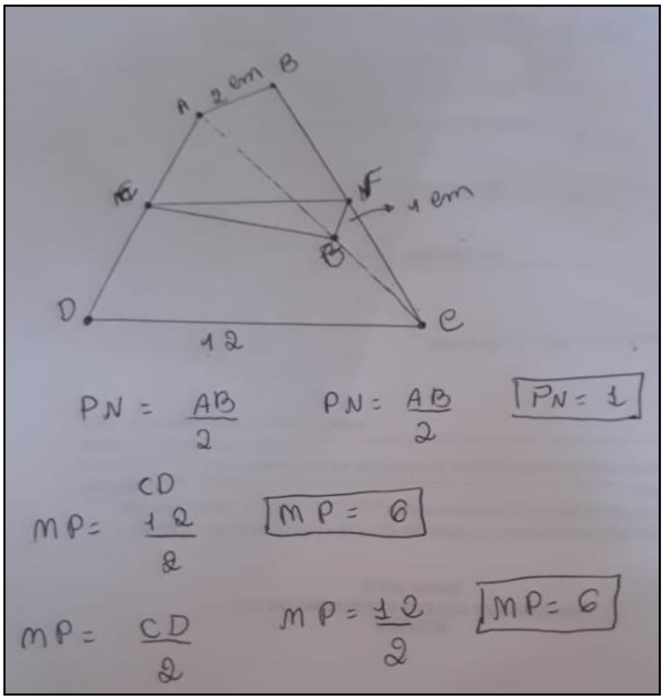

Figura 6. Raciocínio utilizado por L6 para encontrar a medida do segmento $\overline{\mathbf{MP}}$

Observou-se que a partir da discussão, os estudantes foram obtendo mais dados que se aproximaram do próximo passo, ou seja, o encontro da medida do segmento $\overline{MN}$. Para isso, faltaram alguns detalhes de entendimento para lapidarem as informações e chegarem a uma conclusão sobre a solução final do PO. O professor seguiu questionando os participantes sobre as informações, por exemplo, se eles tinham alguma ideia que poderia contribuir com seu colega e assim construir uma estratégia formal matematicamente:

Professor: "Alguma ideia que possa juntar-se ao pensamento de L2?"

L2: "Eu parei no desenho, porque eu estava tentando imaginar esse M como sendo ponto médio de $\overline{AD}$ e esse P como ponto médio de $\overline{AC}$, mas não estou conseguindo provar!!!"

L6: "Eu parei também quando consegui encontrar o valor desse $\overline{MP} = 6$ (ver Figura 6), mas esse que está pedindo MN ele não é paralelo ao lado DC, então o mesmo valor de $\overline{MN}$ não vai ser o mesmo valor de $\overline{MP}$! Então eu estou analisando como irei encontrar o valor de $\overline{MN}$!"

O professor segue questionando os licenciandos com o propósito de tirar deles mais informações, estimulando-os na obtenção de conhecimentos prévios que possam a vir contribuir para a resolução do PO.

Professor: "Então, até agora você encontrou o valor de $\overline{PN} = 1\ cm$ e o valor de $\overline{MP} = 6\ cm$?"

L6: "Sim! Seguindo a ideia de que seja o ponto médio. Eu peguei o segmento $\overline{CD} = 12\ cm$, dividi por dois, e encontrei $\overline{MP} = 6\ cm$. O segmento $\overline{MN}$ vai ser um resultado diferente de $\overline{MP}$ por não ser paralelo a $\overline{CD}$. E mesmo que nas opções do problema não tem 6 como resposta!"

L2: "Mas observe, L6, que a pergunta não quer o valor exato, mas sim que pode ser representado!"

L2: "Me tire aqui algumas dúvidas em relação ao seu raciocínio, L6. Então, você assumiu o M como ponto médio de $\overline{AD}$ e o ponto P como médio de $\overline{AC}$, foi isso?"

L6: "Eu pensei como se fosse dois triângulos, o primeiro ele vai utilizar a medida de $\overline{AB} = 2\ cm$, o outro vai utilizar a medida de $\overline{CD} = 12\ cm$. Aí fazendo a média entre os dois eu encontrei o 1 cm e o 6 cm. Professor, você não pode interferir né".

Questionado pelo estudante se o professor poderia interferir na situação adidática, o docente respondeu apenas mostrando que o caminho que eles seguiam estava correto e também que atentassem à leitura do enunciado e às informações contidas neles, o que poderia ajudá-los no decorrer da solução.

Professor: "Vocês estão indo no caminho correto".

L6: "Eu queria saber se meu raciocínio está correto!"

Professor: "De acordo com L2, você considerou o ponto M, como ponto médio do segmento $\overline{AD}$, é isso que ela está tentando lhe explicar!"

L2: "É isso mesmo, porque se esse M for o ponto médio do segmento $\overline{AD}$, se esse P for o ponto médio do segmento $\overline{AC}$, e se esse 1 cm for realmente o valor de $\overline{PN}$, então o valor dentre as outras alternativas estará dentro do intervalo!"

L6: "Então seria um intervalo que vai entre o 1 mais 6 (1+6), é isso que você está dizendo? Ou 1 menos 6 (1-6)?"

L2: "Mas isso, só pode acontecer se afirmar que o ponto M e P são pontos médios dos dois segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{AC}$, respectivamente!"

Professor: "Mas de acordo com o enunciado, ele afirma que os pontos M e N são pontos médios!"

L6: "Exatamente, eu fui utilizando o que tinha de dados na questão!"

L2: "Professor, diante dessas informações, eu poderia confirmar um valor exato para o valor de $\overline{MN}$?"

Professor: "No caso, o enunciado não está pedindo um valor exato, mas sim aproximado ou que pode ser representado!"

As discussões apresentaram dados relevantes para a resolução do PO, mas não chegaram a uma conclusão formal, ou seja, utilizando uma linguagem matemática que possibilitassem uma prova. O professor questionou os outros participantes se, a partir das discussões, conseguiram compilar informações importantes para contribuir com os colegas.

O licenciando L5 apresentou a sua proposta utilizando o GeoGebra, mostrando aos seus colegas que a medida do segmento procurado não poderia ser maior do que 7 cm. Essa proposta foi apresentada a partir da construção de uma nova figura, em que o ponto B movimentou-se ao redor do ponto A, que continuou fixo. Essa dedução foi explicada por ele a partir da tela de apresentação do Google *Meet* (ver Figuras 7, 8 e 9).

L5: "O que eu fiz foi: mantive o ponto A (seta vermelha) fixo e vou ficar girando o ponto B (seta amarela) em torno do ponto A para percebemos algumas possibilidades da medida do segmento que estamos procurando" (ver Figura 8).

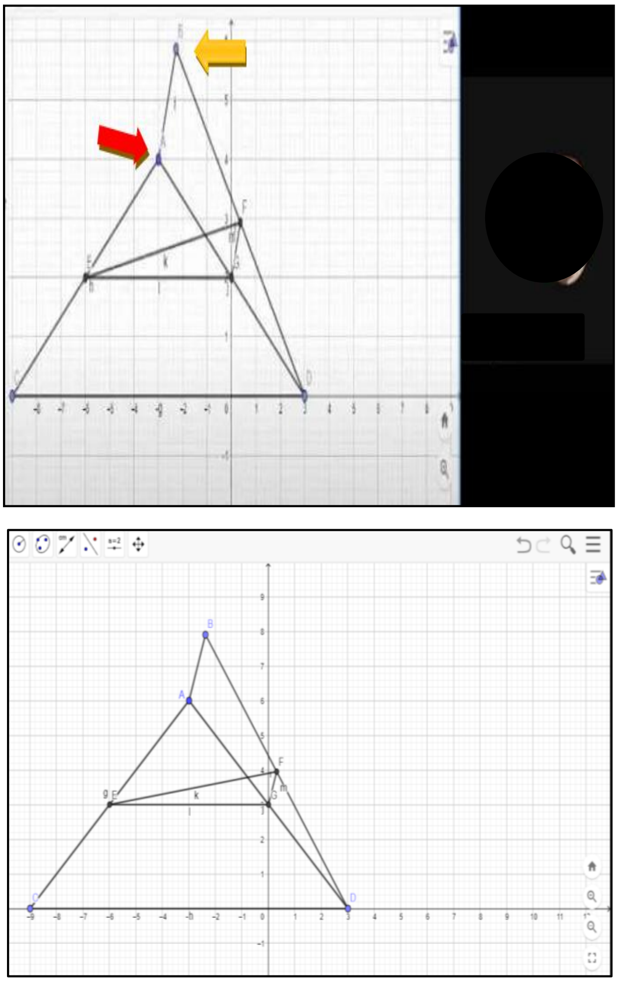

Figura 7. O ponto B gira em torno do ponto A fixo

> *L5: "O que é que acontece, quando o B chega há um certo ponto que a reta $\overline{BD}$ coincide sobre a reta $\overline{AD}$, a figura não pode ser considerada um polígono convexo (Figura 8), então eu posso desconsiderar todas as posições do ponto B que coincide com as outras retas do quadrilátero. Então quando os segmentos $\overline{EG}$ e $\overline{EF}$ coincidem, como vocês, L2 e L6, sugeriram o valor de 1 cm e 6 cm, respectivamente, o máximo valor que o segmento poderá obter é 7 (ver Figura 9). Mas como o problema não quer que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ sejam paralelos o valor terá que ser menor que 7".*

Após movimentar o ponto B em relação ao ponto A, o licenciando tirou várias conclusões sobre a medida do segmento a ser encontrado. A primeira conclusão foi que, ao girar o ponto B e esse ponto chegar ao um momento em que a reta $\overline{BD}$ e a reta $\overline{AD}$ coincidam, o polígono deixaria de ser um quadrilátero convexo, ou seja, as medidas não valeriam para essa construção (ver Figura 8).

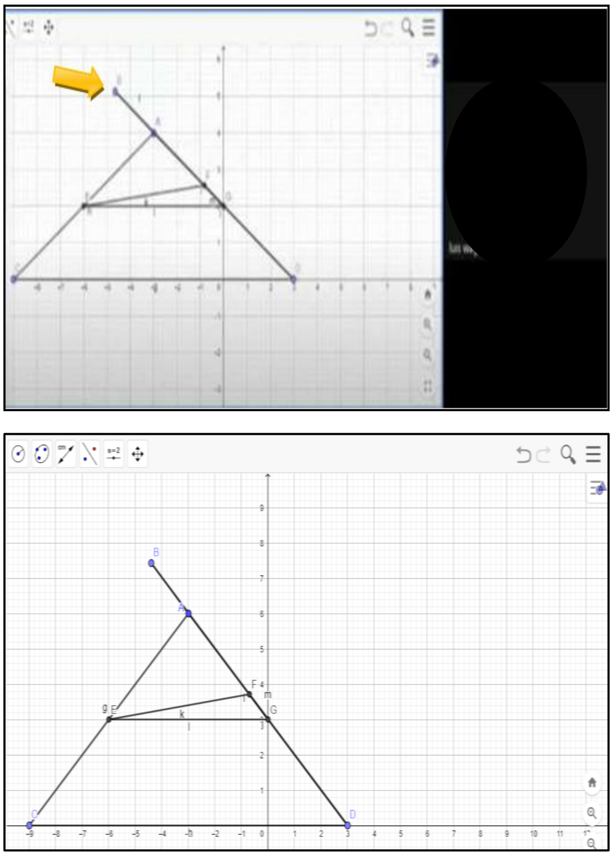

Figura 8. Posição em que o ponto B faz com o a reta $\overline{\text{BD}}$ coincida com a reta $\overline{\text{AD}}$

Dando continuidade, a segunda conclusão partiu do movimentar do ponto B em relação ao ponto A, que teve um momento que o segmento $\overline{EG}$ e $\overline{EF}$ coincidiu, levando o licenciando a perceber que o segmento EF, ou seja, a medida do segmento a ser encontrado, não poderia ser maior do que 7 cm (ver Figura 9), chegando a definir que a medida do segmento não poderia ser um valor exato e que estaria entre 5 e 7 cm.

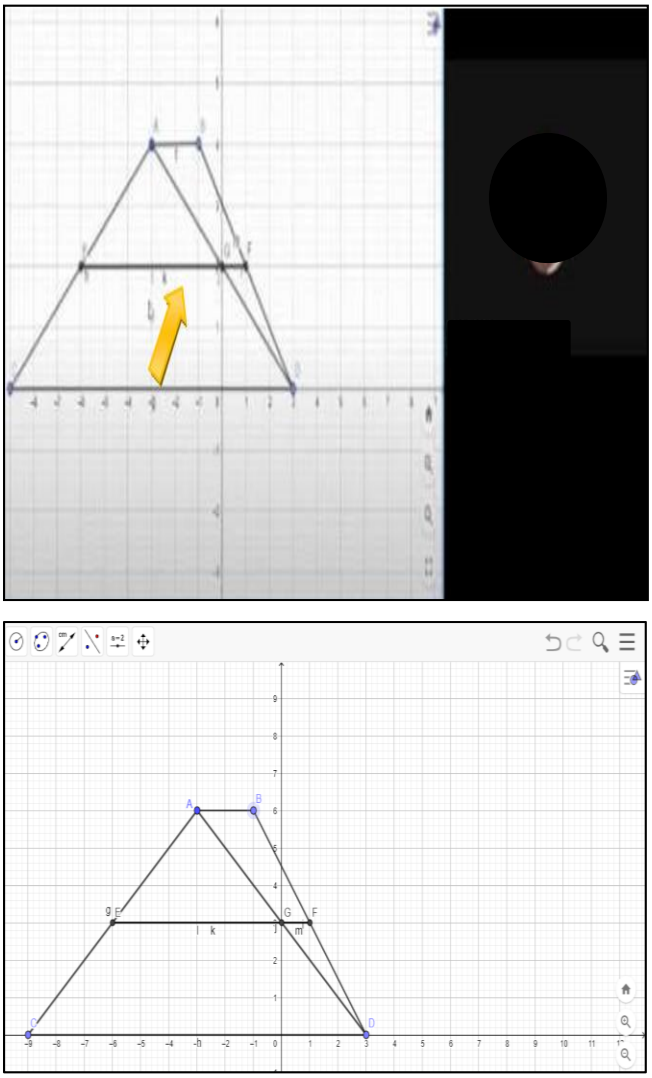

Figura 9. Segmento $\overline{EG}$ e $\overline{EF}$ coincidindo conforme a explicação do L5

Observa-se a explicação do licenciando L5 em relação ao valor máximo que o segmento $\overline{MN}$ (ver Figura 9) pode ser representado, que expôs sua ideia aos demais colegas por intermédio do GeoGebra.

A partir do momento que os licenciandos organizaram as informações mais relevantes formuladas na etapa anterior, abordando uma linguagem matemática formal com o objetivo de validar as conjecturas construídas, estabeleceu-se a etapa de validação, que, segundo Brousseau [22], "é uma situação cuja solução requer que os atores estabeleçam juntos a validade do conhecimento característico dessa situação".

Desse modo, juntando as informações apresentadas durante as etapas anteriores, a aluna L2 chegou à solução final, validando as estratégias encontradas e observando os dados abordados pelos colegas.

> *L2: "Bom, juntando as informações da colega L6, que dizia que o valor $\overline{PN} = 1$ cm e $\overline{MP} = 6$ cm, encontrado utilizando a base média, temos que, com essas medidas, eu posso construir o triângulo ΔMNP, cujas medidas são 6, 1 e x (ver Figura 10, seta amarela). Desse modo, eu posso utilizar a condição de existência do triângulo, então o lado que eu chamei de x teria que ser menor do que seis mais um (x < 6+1), o um (1) menor do que a soma de seis mais x (1 < 6+x) e o seis menor que um mais x (6 < 1 + x). Então, no primeiro caso, sabemos que x tem que ser menor do que 6 mais 1 (ver Figura 11, seta vermelha) e pegando o terceiro caso, quando isolo o x, eu obtenho x maior do que seis menos um (x > 6 – 1). Ou seja, o valor de x tem que estar entre 5 e 7, concluindo que a resposta aproximada, de acordo com os itens do problema, é 6,5".*

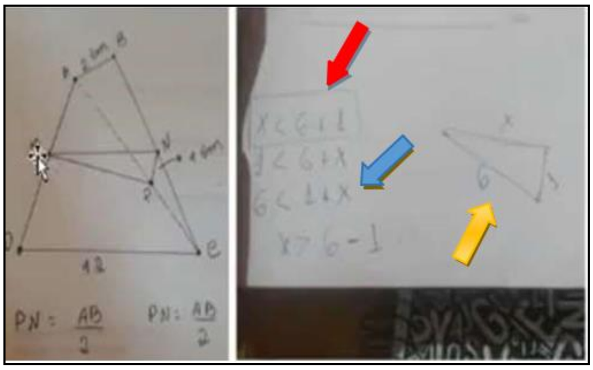

Figura 10. Validação da estratégia que proporcionou o encontro da resposta da SDO

Após a explicação e validação da solução pelos estudantes, o pesquisador retomou seu lugar como protagonista, indagando aos estudantes se ficou alguma dúvida em relação a explicação do colega. Esse momento se consolida como a etapa de institucionalização, que, segundo [21], é definida "como aquela em que o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber".

Desse modo, o professor explicou quais conceitos foram utilizados no PO dando ênfase para o teorema da base média, o que proporcionou os participantes encontrarem as medidas dos segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{PN}$, dando possibilidade à construção do triângulo ΔPMN. De acordo com [31], esse teorema se define da seguinte maneira: "O segmento que liga os pontos médios de dois lados de um triângulo qualquer, tem a metade do comprimento da base do triângulo". Com essas informações obtidas, puderam chegar a outro conceito como a condição de existência de um triângulo, levando-os ao resultado final, nesse caso, 6,5.

Vale destacar que o uso do *software* GeoGebra proporcionou aos estudantes o entendimento intuitivo do tamanho do segmento $\overline{MN}$ procurado, por meio da dinamização da figura. Uma nova construção a partir do enunciado original permitiu o uso do segmento $\overline{AB}$ como um raio de uma circunferência de centro A, fazendo com que o sujeito identificasse que a medida do segmento $\overline{MN}$ permaneceria entre o intervalo de 5 a 7 cm. Essa intuição levou a outro colega a possibilidade da aplicação da condição de existência de um triângulo que, por meio da demonstração, validou a resposta final.

Percebeu-se ainda que a figura adaptada possibilitou com o uso do *software* GeoGebra, por intermédio da dinamização da figura do PO, o desenvolvimento da autonomia dos sujeitos frente à ferramenta tecnológica na utilização dos seus conhecimentos geométricos em relação ao conteúdo proposto.

Conclusões

Nesta pesquisa, foi introduzido e discutido o conceito de SDO interligado à teoria de ensino da TSD, diante de uma questão oriunda da OBMEP sobre o teorema da base média do triângulo. A escolha desse conteúdo matemático deu-se pela sua pouca abordagem em sala de aula, além de dificuldades evidenciadas pelos estudantes durante o seu entendimento e pela ausência em determinados livros didáticos.

Dessa forma, foi discutida uma SDO, com base nas fases da TSD, como interesse na aplicação em sala de aula e/ou preparação para as olimpíadas de Matemática, atingindo, assim, o objetivo da pesquisa.

A TSD criou um ambiente que proporcionou a interação baseado no triângulo didático professor, aluno e meio e foi observado, no momento da experimentação, que houve essa interlocução entre ambos. Essa interlocução proporcionou aos estudantes a construção do teorema da base média do triângulo de maneira autônoma percorrendo assim o caminho de um matemático [21]. Além desse, houve o uso de outros conceitos gemétricos como: condição de existência de triângulos e semelhança de triângulos.

Também foi utilizado o *software* GeoGebra como ferramenta que auxiliou o docente na transposição didática do PO possibilitando um maior dinamismo ao meio, como também criou possibilidades aos estudantes na visualização e movimentação da figura que proporcionou o entendimento de algumas situações dentro do PO, como a capacidade de entender que a medida do segmento procurado só poderia estar dentro do intervalo de 5 cm e 7 cm.

Durante a pesquisa, houve alguns obstáculos que quase prejudicou a realização da aplicação da pesquisa. Um desses obstáculos foi a paralização das instituições de ensino devido à pandemia de Covid-19, impossibilitando a aplicação presencial com os educandos. Assim, a pesquisa deixou de ser presencial e passou a ser realizada de maneira remota, por meio da plataforma Google *Meet*. Também foi utilizado o aplicativo de mensagens *WhatsApp* para a transferência das construções no GeoGebra, que possibilitou o uso tanto pelo computador como pelo celular, podendo ser acessado pelo *QR code* disponibilizado em cada figura.

A aplicação da SDO por intermédio do ensino remoto proporcionou aos sujeitos participantes, futuros professores, vivenciar essa proposta antes realizadas por outros estudos apenas de modo presencial, ampliando o uso em casos emergenciais, como nesse atual momento pandêmico.

Portanto, utilizou-se, nesta investigação, POs adaptados com o auxílio do *software* GeoGebra, disponibilizando aos professores um modelo de ensino baseado na TSD que proporcionou, em sala de aula, uma metodologia que diferiu do ensino tradicional e padronizados pelos livros didáticos, como também disponibilizando a responsabilidade do aluno pela construção do seu conhecimento.

Agradecimentos

Agradecemos o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq concedido para o desenvolvimento desta pesquisa no Brasil.

Notas

[1] *OBMEP* 2020. Disponível em: http://www.obmep.org.br/ acesso em: 12 de maio de 2020.

[2] O Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) possui o objetivo de avaliar e disponibilizar as obras didáticas, pedagógicas e literárias e entre outros materiais de apoio à prática educativa, de forma sistemática, regular e gratuita, às escolas públicas de educação básica das redes federal, estaduais, municipais e distrital e também às instituições de educação infantil comunitárias, confessionais ou filantrópicas sem fins lucrativos e conveniadas com o Poder Público. Mais informações disponíveis no site: http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=12391:pnld.

[3] Disponível em: http://www.obmep.org.br/pic.htm

Referências

[1] I. F. de Azevedo, F. R. V. Alves and J. C. de Oliveira, "OBMEP e Teoria das Situações Didáticas: Uma proposta para o professor de matemática", *Educação Matemática em Revista - RS*, vol. 12, no. 19, p. 82-92, 2018.

[2] E. A. S. Pontes, "Os Quatro Pilares Educacionais no Processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática," *Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*, no. 24, p. 15-22, 2019.

[3] F. R. V. Alves, M. A. Dias, "Formação de professores de matemática: um contributo da engenharia didática (ED)," *REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, vol. 12, no. 2, p. 192-209, 2018.

[4] M. Artigue, "Ingénierie didactique," *Recherches en Didactiquedes Mathématiques*, vol. 9, no. 3, pp. 281-308, 1988.

[5] G. Brousseau, "*Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques",* Mathematics. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 1986.

[6] L. R. Dante, *Matemática: contexto e aplicações*. São Paulo: Ática, 2016.

[7] G. Iezzi, et al., *Matemática: ciência e aplicações*, vol. 1, Saraiva Educação Ltda, São Paulo, 2016.

[8] F. M. Leonardo, *Conexões com a Matemática*, Editora Moderna, 2016.

[9] J. E. de. Oliveira Neto, "Situações didáticas olímpicas aplicadas a problemas de geometria plana da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)," Dissertação Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2019.

[10] F. R. V. Alves, "Visualizing the olympic didactic situation (ods): teaching mathematics with support of the geogebra software," *Acta Didactica Napocensia*, vol. 12, no. 2, pp. 97-116, 2019.

[11] C. Laborde, "Teaching learning projects and didactical engineering," *La matematica e la sua didattica*, vol. 25, no. 2, pp. 163–179, 2017.

[12] F. R. V. Alves, "Transição complexa do Cálculo TCC: Engenharia Didática para as noções de Sequências e Séries de Potências," *Educação Matemática em Revista – RS*, vol. 1, no.17, p. 83-97, 2016.

[13] R. Douady, "Ingenierie didactique, un instrument privilegie pourum prêmio na compilação da Ia c! asse," *ProLeedings · da PMEXl. Montreal*, Julho 1987, pp. 222-228, 1987.

[14] C. Laborde, "Affronter la complexité des situations d'apprentissage des mathématiques em classe. Défis et tentatives," *Didaskalia*, vol. 19, no. 10, pp. 97-112, 1997.

[15] C. Margolinas and P. Drijvers, "Didactical engineering in France; an insider's and an outsider's view on its foundations, its practice and its impact," *ZDM Mathematics Education*, vol. 47, pp. 893-903, 2015.

[16] M. Artigue, M. Perrin-Glorian. "Didactic Engineering, Research and Development Tool: some Theoretical Problems linked to this Duality," *For The Learning of Mathematus*, vol. 11, no. 1, p. 13-18, 1991.

[17] R. Douady, "Jeux de Cadres et dialetique d´outil-objet dans l´enseignement de Mathématiques – une réalisation dans tout cursus primaire," Thése d´État, Paris: Université Paris VII, 1984.

[18] W. M. Pommer, "Brousseau e a idéia de Situação Didática," *Seminários de Ensino de Matemática/ FEUSP*, 2008.

[19] G. Brousseau, "A etnomatemática e a teoria das situações didáticas," *Educação Matemática Pesquisa, São Paulo*, vol. 8, no. 2, pp. 267-281, 2006.

[20] G. Brousseau, "*Theory of Didactical Situationsin Mathematics Didactique de Mathématiques, 1970–1990*," 19. ed. [S.l.]: Mathematics Education Library, 2002.

[21] S. A. Almouloud, "*Fundamentos da Didática da Matemática*," Ed. UFPR, 2007.

[22] G. Brousseau, *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques*, 2010. [Online]. Available: http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf

[23] G. Brousseau, "Educacíon y didática de las matemáticas," *Educacíon Matemática*, vol. 12, no. 1, pp. 5–38, 2000.

[24] A. P. R. A. Santos and F. R. V. Alves. "A teoria das Situações Didáticas no ensino das Olimpíadas de Matemática: Uma Aplicação do Teorema de Pitot," *Revista IndagatioDidactica*, vol. 9, no. 4, pp. 279-296, 2017.

[25] C. C. do N. Oliveira, F. R. V. Alves and R. S. da Silva, "Concepção e descrição de situações olímpicas com auxílio do GeoGebra," *Revista Thema*, vol. 14, no. 3, pp. 250-263, 2017.

[26] R. M. Pavanello, "O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e consequências," *Zetetike*, vol. 1, no. 1, pp. 7-17, 1993.

[27] E. P. Crescenti, "A formação do professor de Matemática: aprendizagem em geometria e a atuação docente," *Práxis Educativa*, vol. 3, no. 1, pp. 81–94, 2008.

[28] C. B. Nunes, "O Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática," Tese de Doutoramento em Ensino e Aprendizagem de Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos. Universidade Estadual Paulista – UNESP, São Paulo- Brasil, 2010.

[29] M. Paiva, *Matemática Paiva*. São Paulo: Moderna, 2015.

[30] G. L. Kliemann, "Potencialidades e limitações de material didático para explorar resolução de problemas matemáticos," Dissertação de Mestrado profissional em ensino de ciências exatas, Centro Universitário Univates, 2015.

[31] D. M. B. Costa, J. L. Teixeira, P. H. Siqueira and L. V. de Souza, "*Elementos de Geometria: Geometria plana e especial*," UFPR: Curitiba, 2012.

Información de Contacto de los/a Autores/a:

José Gleison Alves da Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Sobral, Brasil
gleison.profmat.seduc@gmail.com
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-3093-0239

Renata Passos Machado Vieira
Secretaria de Educação do estado do Ceará - SEDUC
Fortaleza – Ceará – Brasil
re.passosm@gmail.com
ORCID iD: http://orcid.org/0000-0002-1966-7097

Francisco Régis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
Av. Treze de maio, Benfica, Fortaleza, Brasil
fregis@ifce.edu.br
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-3710-1561

Daniel Brandão Menezes
Universidade Estadual Vale do Acaraú
Sobral, Brasil
brandaomenezes@hotmail.com
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-5930-7969

José Gleison Alves da Silva
Professor da rede Municipal de Sobral – SEDUC, Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE, Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA, Professor de Matemática da rede Municipal de Sobral – CE (Brasil).

Renata Passos Machado Vieira
Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE), professora da Rede Estadual do Ceará.

Francisco Régis Vieira Alves
Possui graduação em Bacharelado em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (1998), graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (1997), mestrado em Matemática Pura pela Universidade Federal do Ceará (2001) e mestrado em Educação, com ênfase em Educação Matemática, pela Universidade Federal do Ceará (2002). Doutorado com ênfase no ensino de Matemática (UFC - 2011). Atualmente é professor do Centro Federal de Educação Tecnológica do Ceará, do curso de Licenciatura em Matemática. Coordenador do Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática - PGECM - IFCE.

Daniel Brandão Menezes
Doutorado em Educação pela Universidade Federal do Ceará - UFC, Mestre em Matemática pela UFC, Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará - UECE e professor titular da Universidade Estadual Vale do Acaraú - UVA, Brasil.